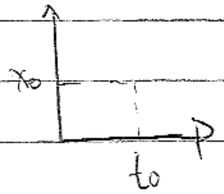
18/2/2014

Ασκήσεις

Τύπος ερωτημάτων – Μεθοδολογία

(A) $x' = f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$

$D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t-t_0| \le a, |x-x_0| \le b\}$



i) Αν f συνεχής στο $D \Rightarrow \exists$ λύση

ii) Αν η f Lipschitz ως προς x στο $D \Rightarrow \exists$ μοναδική λύση

i) Προφανές (από θεώρημα Peano)

ii) Αν $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ στο D είναι φραγμένη τότε η f είναι Lipschitz ως προς

$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le K|x_1 - x_2|$

$\to$ Ελέγχουμε κάποια μερική παράγωγο

Παραδείγματα

1) $y' = y^{1/3}$, $y(0)=1$

$f(t,y) = y^{1/3}$

$D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : |t| \le a, |y-1| \le b\}$

- Η f είναι συνεχής στο $D \Rightarrow \exists$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} y^{-2/3} = \frac{1}{3}\frac{1}{y^{2/3}}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ φραγμένη στο D

Άρα υπάρχει μοναδική λύση

2) $y' = y^{1/3}$, $y(0)=0$

$f(t,y) = y^{1/3}$

$D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : |t| \le a, |y| \le b\}$

- f συνεχής στο $D \Rightarrow \exists$ λύση

• $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}\frac{1}{y^{2/3}}$ δεν είναι φραγμένη

Συνεπώς το ΠΑΤ δεν έχει μοναδική λύση ή δε μπορούμε ν' αποφανθούμε

3) $y' = (x-y)^{1/2}$, $y(2)=1$

$f(x,y) = (x-y)^{1/2}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2| \leq a, |y-1| \leq b\}$

• Η f είναι συνεχής στο $D \Rightarrow \exists$ λύση

• $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(x-y)^{-1/2}$ η οποία είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists$ μοναδική λύση του ΠΑΤ

(B) $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = t_0$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$D = \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t-t_0| \leq a, \|y-y_0\| \leq b\}$

i) f συνεχής στο D

ii) f είναι Lipschitz στο D $\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq K\|y_1 - y_2\|$

$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}$

1) $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ — συνεχείς

$z_1 = y \Rightarrow z_1' = z_2$ $\qquad z_1(x_0) = y_0$

$z_2 = y' \Rightarrow z_2' = f(x) - p(x)z_2 - q(x)z_1$ $\qquad z_2(x_0) = y_1$

$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $z' = g(t, z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_2 \\ f(x) - p(x)z_2 - q(x)z_1 \end{bmatrix}$

$D = \{(x,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : |x-x_0| \leq a, \|z-z_0\| \leq b\}$

Ξέρουμε f, g συνεχείς στο D $\longrightarrow \exists$ λύση

$\frac{\partial g}{\partial z_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q(x) \end{bmatrix}$, $\frac{\partial g}{\partial z_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -p(x) \end{bmatrix}$ οι οποίες είναι φραγμένες στο D

Άρα υπάρχει μοναδική λύση

2) $x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 + x_1^{-1} \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$, $x_1^0 > 0$

$\boxed{x_1' = x_1^2}$ $\Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = x_1^2 \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x_1} = t + c_1 \Rightarrow x_1(t) = -\frac{1}{c_1}$

Έχουμε $x_1(0) = x_1^0 \Rightarrow -\frac{1}{c_1} = x_1^0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{x_1^0}$

$\Rightarrow x_1(t) = \frac{-1}{t - 1/x_1^0}$

$\boxed{x_2' = x_2 + x_1^{-1}} \Rightarrow x_2' = x_2 - \left(t - \frac{1}{x_1^0}\right) \Rightarrow x_2' - x_2 = -t + \frac{1}{x_1^0}$

$\Rightarrow e^{-t} x_2' - x_2 e^{-t} = e^{-t}\left(-t + \frac{1}{x_1^0}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}(x_2 e^{-t}) = -t e^{-t} + \frac{1}{x_1^0} e^{-t} \Rightarrow$

$x_2 e^{-t} = -\int t e^{-t} + \frac{1}{x_1^0}\int e^{-t} dt \Rightarrow x_2 e^{-t} = \int t (e^{-t})' dt - \frac{1}{x_1^0} e^{-t} =$

$x_2 e^{-t} = t e^{-t} + e^{-t} - \frac{1}{x_1^0} e^{-t} + c_2 \Rightarrow x_2(t) = c_2 e^{t} + t + 1 - \frac{1}{x_1^0}$

Έχουμε $x_2(0) = x_2^0 \Rightarrow c_2 + 1 - \frac{1}{x_1^0} = x_2^0 \Rightarrow c_2 = x_2^0 - 1 + \frac{1}{x_1^0}$

$\Rightarrow x_2(t) = \left(x_2^0 - 1 + \frac{1}{x_1^0}\right) e^{t} + t + 1 - \frac{1}{x_1^0}$

Μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης $t \in \left(-\infty, \frac{1}{x_1^0}\right)$

$\lim_{t \to \frac{1}{x_1^0}^-} x(t) = \begin{bmatrix} +\infty \\ \frac{1}{x_1^0} + x_2^0 \end{bmatrix}$

3) $x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2x_1 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1' = \dfrac{1}{2x_1} \Rightarrow \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{1}{2x_1} \Rightarrow 2x_1 dx_1 = dt \Rightarrow x_1^2 = t + c \\ x_1(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x_1(t) = \overset{\text{αφού } x_1(0) > 0}{\pm} \sqrt{t+1} \qquad t \geq -1$$

$$x_2' = x_2^2 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = x_2^2 \Rightarrow \frac{dx_2}{x_2^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x_2} = t + c_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{t + c_2} \\ x_2(0) = 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{c_2} = 1 \Rightarrow c_2 = -1 \end{array}\right\} x_2(t) = \frac{-1}{t-1} \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{1-t} \qquad t < 1$$

$t \neq 1$, επιλέγω $(-\infty, 1)$ / $(1, +\infty)$ γιατί περιέχει αρχ. συνθ. "0"

Μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης: $(-1, 1)$

$$\lim_{t \to -1^+} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \lim_{t \to 1^-} x(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ +\infty \end{bmatrix}$$

4) $y''' + (y-5)^2 = 0, \quad y(t_0) = 5$

$y'(t_0) = y''(t_0) = 0$

$y_1 = y \Rightarrow y_1' = y_2$

$y_2 = y' \Rightarrow y_2' = y_3$

$y_3 = y'' \Rightarrow y_1' = -(y_1 - 5)^2$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}' = f(t, y_1, y_2, y_3) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -(y_1-5)^2 \end{bmatrix}$$

$$D = \{ (t, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4 : |t - t_0| \leq a, \|(y_1, y_2, y_3) - (5, 0, 0)\| \leq b \}$$

- Η f συνεχής στο $D \Rightarrow \exists$ λύση
- $\dfrac{\partial f}{\partial y_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2(y_1 - 5) \end{bmatrix}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Όλες οι $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ είναι φραγμένες $\Rightarrow \exists$ μοναδική λύση $\forall t_0 \in \mathbb{R}$

$f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

Παλιό Θέμα

Να βρεθούν όλες οι μη-αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει: $f(t) \le \int_0^t f(s)\,ds$

Λύση

$f(t) \ge 0$

Από Gronwall: $f(t) \le 0 + 1\int_0^t 0\, e^{1(t-s)}\,ds = 0 \Rightarrow f(t) \le 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\boxed{f(t)=0}$

Ευστάθεια Δ.Ε.

$y' = f(y)$

Στάσιμα σημεία: $f(y)=0 \Rightarrow y=y_1$ ή $y=y_2 \dots$

Έπειτα κάνουμε πινακάκι

y	$-\infty$		y_1		y_2		$+\infty$
$f(y)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\longleftarrow$		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$	

Αν τα βελάκια συγκλίνουν: ευσταθές ασυμπτωτικά, αλλιώς ασταθές ασυμπτωτικά

Άλλος έλεγχος: $f'(y_1)<0$: ασ. ευσταθ.

$f'(y_1)>0$: ασταθ.

(+): το βελάκι δεξιά

(−): το βελάκι αριστερά

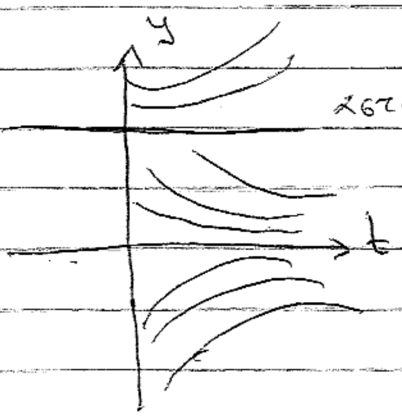
Παραδείγματα

(1) $y' = y^2 - 2y = f(y)$

$f(y) = 0 \Rightarrow y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y-2) = 0$ $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Στάσιμα σημεία: 0, 2

y	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\rightarrow$		$\leftarrow$		$\rightarrow$	
			ασ. ευστ.		ασταθές		



Επαλήθευση

$f'(y) = 2y - 2$ $\begin{cases} f'(0) = -2 < 0 \\ f'(2) = 2 > 0 \end{cases}$

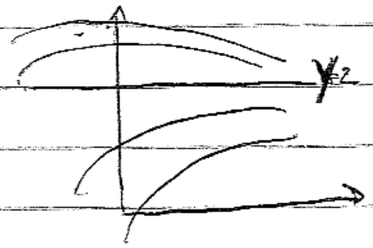
(2) $y' = (2-y)^3 = f(y)$

$f(y) = 0 \Rightarrow y = 2$ (στάσιμο σημείο: 2)

$f'(y) = -3(2-y)^2$, $f'(2) = 0$

y	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	
		$\rightarrow$		$\leftarrow$	

$y = 2$: ασ. ευσταθές



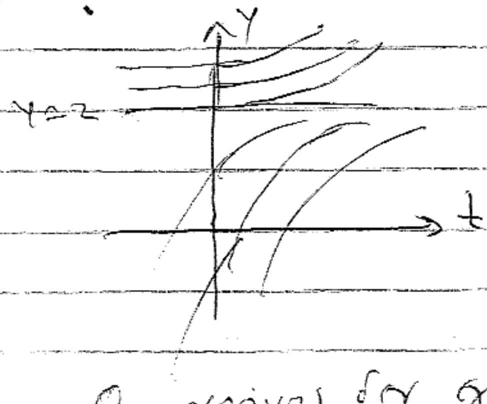
(3) $y' = (2-y)^4 = f(y)$

$f(y) = 0 \Rightarrow y = 2$ (στάσιμο σημείο: 2)

$f'(2) = 0$

y	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$+$	0	$+$	
		$\rightarrow$		$\rightarrow$	

$y = 2$ ασταθές



Ο χρόνος δεν έχει σημασία

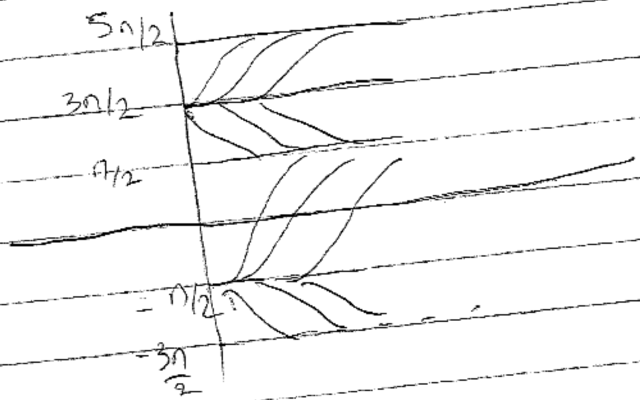
$y' = \cos y = f(y)$

$f(y) = 0 \Rightarrow y = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

y	$-\infty$ ...	$-\pi/2$		$\pi/2$		$3\pi/2$		$5\pi/2$ ... $+\infty$
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
	$\leftarrow$	ασ.	$\rightarrow$	ασ. ευστ.	$\leftarrow$	ασ.	$\rightarrow$	

Τα σημεία $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι ασ. ευστ. $k \in \mathbb{Z}$

Τα σημεία $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι ασταθή



$y' = f(y)$ αυτόνομο

21/2/2014

Γραμμικά Συστήματα

$x' = f(x,y) = ax + by + \gamma$

$y' = g(x,y) = \delta x + \varepsilon y + \zeta$

1) Εύρεση Στασίμων Σημείων

2) Μέθοδοι γραμμ.: $\forall$ στάσιμο είδος ευστάθειας

Εύρεση ΟΛΩΝ των λύσεων

1) $f(x,y) = g(x,y) = 0$:

Ασκήσεις

1) $x' = 5x - 12y + 17 = f(x,y)$

$y' = x - 2y + 3 = g(x,y)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 10y-15-12y+17=0 \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1 \\ x=2-3 \Rightarrow x=-1 \end{array}$$

Στάσιμο: $(-1,1)$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -12 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (5-\lambda)(-2-\lambda)+12=0 \Rightarrow$

$\lambda^2-3\lambda=-2 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}$ $\Rightarrow$ ασταθής κόμβος

2) $x'=x-y$
$y'=x-2y$

Στάσιμα: $\left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} x=y=0$

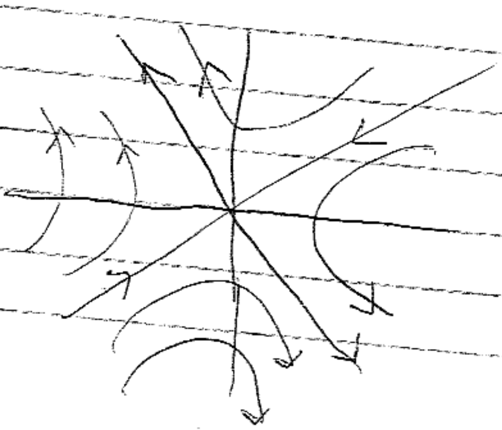
Στάσιμο: $(0,0)$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda)+1=0 \Rightarrow$

$\lambda^2+\lambda-1=0$

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$: Σάγμα



3) $x' = y$
$y' = -x$
Στάσιμο σημείο: $(0,0)$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$: Ευσταθές (κέντρο)

Προσοχή! για μη-γραμμικό σύστημα δεν είναι κέντρο (ακόμη κι αν έτσι φαίνεται από πράξεις)
→ Το κέντρο δεν πάει σε κέντρο

4) $x' = 2x + y$
$y' = -x - 2y$
Στάσιμο Σημείο: $(0,0)$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda) + 1 = 0$
$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$: Σάγμα

Ιδιοδιανύσματα:

- $\lambda = \sqrt{3}$

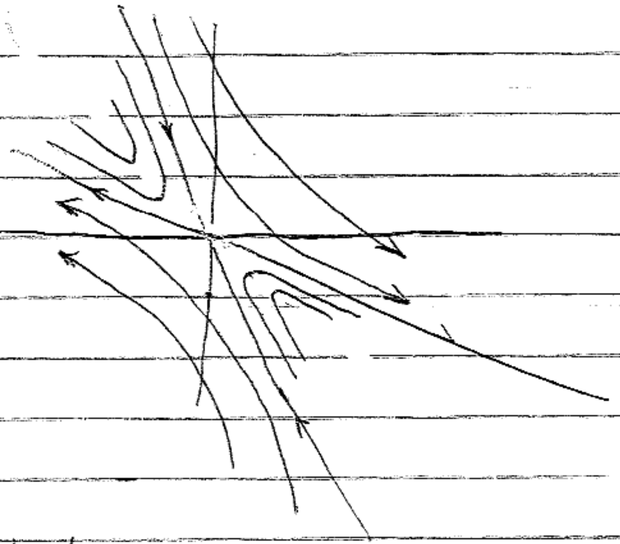
$\begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2-\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (2-\sqrt{3})u + v = 0 \\ -u - (2+\sqrt{3})v = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = -(2-\sqrt{3})u$

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -(2-\sqrt{3})u \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 1 \\ -(2-\sqrt{3}) \end{bmatrix}$, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3}-2 \end{bmatrix}$

- $\lambda = -\sqrt{3}$

$$\begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (2+\sqrt{3})u + v = 0 \\ -u + (-2+\sqrt{3})v = 0 \end{matrix}$$

$v = -(2+\sqrt{3})u$ $\qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -(2+\sqrt{3}) \end{bmatrix}$



5) $x' = \frac{1}{2}x - 2y$

$y' = x - 2y$

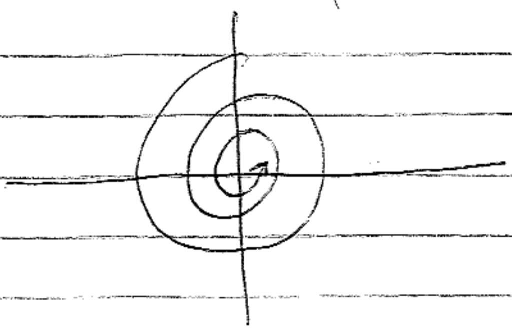
Στάσιμο σημείο $(0,0)$

$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές $\begin{vmatrix} 1/2-\lambda & -2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(-2-\lambda)+2=0 \Rightarrow 2\lambda^2+3\lambda+2=0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4} = -\frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$

Ασ. Ευσταθές : αρνητικό πραγματικό μέρος



Εστία

71

...ας μπορούμε να πάρουμε
α τον καθορισμό της φοράς
ημεία.
→ Δε χρειάζεται

Μη-γραμμικά

$x' = \sin(x+y) = f(x,y)$
$y' = y \qquad = g(x,y)$

$f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ $\left.\begin{cases} \sin(x+y)=0 \\ y=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

Στάσιμα Σημεία: $(n\pi, 0),\ n\in\mathbb{Z}$

$A(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$

$A(x,y) = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Στα στάσιμα σημεία: $A(n\pi,0) = \begin{bmatrix} \cos(n\pi) & \cos(n\pi) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

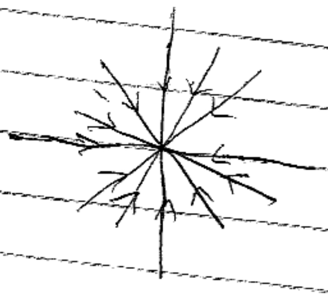
$\det(A(n\pi,0)) = (-1)^n \neq 0$ (ελέγχουμε για να ~~...~~ προχωρήσουμε $\det = 0 \to \lambda_i = 0$)

Ιδιοτιμές $\begin{vmatrix} (-1)^n - \lambda & (-1)^n \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda_1 = (-1)^n$
$\lambda_2 = 1$

Αν n άρτιος $\lambda_1\lambda_2 > 0$ ασταθές
Αν n περιττός $\lambda_1\lambda_2 < 0$ ασταθές (σάγμα)

~~Θεωρήματα να θυμόμαστε~~
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$: ασ. κόμβος ή ασ. άστρο
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: ασ. νόθος κόμβος

η άρτιο) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $y=0$ $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



2) $x' = y + x^2$
$y' = -x + y^2$

Στάσιμα: $y + x^2 = 0 \Rightarrow y + y^4 = 0 \Rightarrow y(1+y^3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y= \\ y \end{cases}$
$-x + y^2 = 0 \Rightarrow x = y^2$

$A_1(0,0)$ $A_2(-1,-1)$

$A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ -1 & 2y \end{bmatrix}$

$A(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ιδιοτιμές: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

κέντρο του αντίστοιχα γραμμικά (αλλα δε γνωρ... είδος τ.. μ.. ευε...

$A(A_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ιδιοτιμές $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda$

σάγμα $\lambda = \pm\sqrt{3}$

3) $x' = x(1 - x^2 - 6y^2)$
$y' = y(1 - 3x^2 - 3y^2)$

 YOLO

$$x(1-x^2-6y^2)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x^2+6y^2=1 \end{cases}$$

$$y(1-3x^2-3y^2)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ 3x^2+3y^2=1 \end{cases}$$

$A_1(0,0)$, $A_2\left(0, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $A_3\left(0, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $A_4(1,0)$, $A_5(-1,0)$

$A_6\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$, $A_7\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$, $A_8\left(\sqrt{\frac{1}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$, $A_9\left(\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1-x^2-6y^2+x(-2x) = 1-3x^2-6y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -12xy$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -6xy$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1-3x^2-3y^2+y(-6y) = 1-3x^2-9y^2$$

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} 1-3x^2-6y^2 & -12xy \\ -6xy & 1-3x^2-9y^2 \end{bmatrix}$$

$A(A_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⇝ $\lambda_1=\lambda_2=1$: ασταθές άστρο

$A(A_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ⇝ $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$: ασ. ευστ. κόμβος

$A(A_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$A(A_4) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2=-2$: ασ. ευστ. άστρο

$A(A_5) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$A(A_6) = \begin{bmatrix} 1-\frac{3}{5}-\frac{12}{15} & -12\sqrt{\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{2}{15}} \\ -6\sqrt{\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{2}{15}} & 1-\frac{3}{5}-\frac{18}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15-9-12}{15} & -12\sqrt{\frac{2}{75}} \\ -6\sqrt{\frac{2}{75}} & \frac{15-9-18}{15} \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές. $\begin{vmatrix} -6/15-\lambda & -12\sqrt{2/75} \\ -6\sqrt{2/75} & -9/15-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ το δαμα

4) $x' = x+4y$
$y' = -2x-5y$ Ευσταθεια;
$V(x,y) = 8x^2 + 11xy + 5y^2$

$V(x,y) > 0$ και $V(0,0) = 0$
$\dot{V}(x,y) < 0$ και $V(0,0) = 0$

Αρνητικά ορισμένο ($\dot{V} \leq 0$) ασ. ευσταθής)

- Συναρτησεις 2 μετ. $\Rightarrow min > 0$
- άθροισμα τετραγώνων
- τριώνυμο & Δ

$V(x,y) = 8x^2 + 2\left(\frac{11}{2}x\right)y + 5y^2 = \ldots$ ΟΧΙ

Καταλαβαίνετε τι λέω;

$\frac{\partial V}{\partial x} = 16x + 11y = 0$
$V_y = 10y + 11x = 0$
$\Big\}$ $x = y = 0$

$V_{xx} = 16$
$V_{yy} = 10$
$V_{xy} = 11$

$$\begin{bmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$|16| = 16$

$\begin{vmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 10 \end{vmatrix} > 0$

$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = (16x+11y)(x+4y) + (10y+11x)(-2x-5y) =$

$16x^2 + 64xy + 11xy + 44y^2 - 20xy - 50y^2 - 22x^2 - 55xy$

$= -6(x^2+y^2) < 0$

αρνητικά ορισμένη $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Άρα: Ασ. ευστ. η αρχή

5) $x' = -x\sin^2 x$

$y' = -y - y^5$

$V(x,y) = x^2 + y^2$

V θετικά ορίζεται

$\dot{V}(x,y) = 2x(-x\sin^2 x) + 2y(-y-y^5) = -2x^2\sin^2 x - 2y^2 - 2y^6$

$\dot{V}$ αρνητικά ορισμένη $\Rightarrow$ ασ. ευστ. το σ.ι.

6) $x' = (x-y)^2(-x+y)$

$y' = (-x-y)(x-y)^2$

$V(x,y) = x^2 + y^2$

V θετικά ορισμένη

$\dot{V} = 2x(x-y)^2(-x+y) + 2y(-x-y)(x-y)^2 = -2(x-y)^2(x^2+y^2)$

$\dot{V}$ αρνητικά ημιορισμένο $\Rightarrow$ αρχή: ευσταθές σ.ι.