ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
Μάθημα Φυσική-ΙΙΙ (3^{ο} εξάμηνο ΣΕΜΦΕ)
4^{η} Σειρά προβλημάτων

22/1/2009 Ι. Ράπτης, Ε. Φωκίτης

1. *Πρόβλημα 3.13, από το βιβλίο του Pain* : Γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης $E=E_0e^{i\omega t}$, είναι συζευγμένη με φορτίο Z_2 μέσω ενός ιδανικού μετασχηματιστή, του οποίου οι αυτεπαγωγές πρωτεύοντος και δευτερεύοντος είναι είναι L_p και L_s αντίστοιχα. Δείξτε ότι η σύνθετη αντίσταση του όλου συστήματος όπως τη "βλέπει" η γεννήτρια, $Z_{ολ}= E/I_1$, όπου I_1 το ρεύμα που διαρρέει το πρωτεύον κύκλωμα, είναι ίση με το άθροισμα της σύνθετης αντίστασης του πρωτεύοντος ($i\omega L_p$) και της ανακλώμενης σύνθετης αντίστασης από το δευτερεύον κύκλωμα $\omega^2M^2/(Z_2+i\omega L_s)$

2. *Συνδυασμός των προβλημάτων 3.21 και 6.1 από το βιβλίο του Pain* :

Μία ηλεκτρική γραμμή μεταφοράς μπορεί να θεωρηθεί ως μία "εν σειρά" σύνδεση αυτεπαγωγών L, με την παρεμβολή "εν παραλλήλω" χωρητικοτήτων C, όπως στο σχήμα της σελίδας 111 (και 207) του βιβλίου. Γράφοντας τις εξισώσεις του Kirchhoff για τον r-τάξης κόμβο και τους περί αυτόν βρόχους, όπως υποδεικνύεται στο βιβλίο, και θεωρώντας ότι το r-τάξης ρεύμα I_r είναι της μορφής $I_r=A_r\cos(\omega t)$, δείξτε ότι τα πλάτη A_r ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών : $A_{r-1}-fA_r+A_{r+1}=0$, όπου $f=2-\omega^2LC$. Η προηγούμενη εξίσωση διαφορών επιδέχεται λύσεις της μορφής $A_r=A\sin(r\theta)$. Με βάση τα προηγούμενα στοιχεία δείξτε ότι η γραμμή λειτουργεί ως φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων, με ζώνη διέλευσης τέτοια ώστε : $0 < \omega^2 < 4/LC$.

Θεωρείστε, στη συνέχεια, ότι το ανωτέρω σύστημα τείνει στο συνεχές όριο με L_0 και C_0 την αυτεπαγωγή και τη χωρητικότητα, ανά μονάδα μήκους, αντίστοιχα, οπότε $I_r(t)=I(z,t)$ και $I_{r\pm1}(t)=I(z\pm dz, t)$. Αναπτύξτε τα $I(z\pm dz, t)$, σε σειρά Taylor περί το z, σε δεύτερη τάξη ως προς dz, και δείξτε ότι η εξίσωση διαφορών μεταπίπτει στην κυματική εξίσωση. Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων σε μία τέτοια γραμμή μεταφοράς.

3. Δύο ημιάπειρες χορδές πυκνοτήτων ρ_1 και ρ_2 συνδέονται στο σημείο x=0 και τείνονται με τάση Τ. Στο ίδιο σημείο συνδέεται ελατήριο σταθεράς s με το άλλο του σημείο στηριγμένο σε ακλόνητο σημείο. Οταν η χορδή ηρεμεί το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Από τη μία πλευρά της χορδής διαδίδεται οδεύον κύμα προς το σημείο x=0, όπου εν μέρει διαδίδεται και εν μέρει ανακλάται. 1) Γράψτε τις οριακές συνθήκες που εκφράζουν τη συνέχεια της χορδής και τη δυναμική ισορροπία στο σημείο x=0, 2) Υπολογίστε από τις προηγούμενες σχέσεις το συντελεστή διάδοσης στο σημείο μεταβολής της πυκνότητας, 3) Βρείτε τη σχέση φάσεων προσπίπτοντος και διαδιδόμενου κύματος στο όριο των μικρών και των μεγάλων συχνοτήτων.

5. Γραμμική διάταξη αποτελείται από 2Ν σώματα μάζας m, σε ίσες αποστάεις a μεταξύ τους, τα οποία συνδέονται εν σειρά με ελατήρια εναλλασσόμενων σταθερών s_1 και s_2. α) Για μικρές διαμήκεις ταλαντώσεις των σωμάτων, βρήτε την σχέση διασποράς και σχεδιάστε την πρόχειρα.
β) Εφαρμόζοντας περιοδικές οριακές συνθήκες βρήτε τις επιτρεπόμενες συχνότητες.
Υπόδειξη : παραδεχθήτε για τα πλάτη ταλάντωσης δύο διαδοχικών σωμάτων τις σχέσεις $x_{2n} = A\exp[i2nq\alpha - i\omega t)], x_{2n+1} = B\exp[i(2n+1)q\alpha - i\omega t]$

6. Ιδανική ελαστική χορδή συνολικού μήκους L αποτελείται από δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα, μήκους a=L/4 και γραμμικής πυκνότητας ρ_1, συνδέεται με το δεύτερο τμήμα, μήκους L-a=3L/4 και γραμμικής πυκνότητας $\rho_2=\rho_1/9$, μέσω μίας σημειακής μάζας m, και το σύστημα τείνεται κατά μήκος του άξονα x με μία τάση Τ και με τα δύο άκρα του ακλόνητα στα σημεία x=0 και x=L. Να βρεθεί η σχέση υπολογισμού των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος

8. Βρήτε την σχέση που ικανοποιεί ο κυματαριθμός k στασίμων κυμάτων σε ιδανική χορδή μήκους L, πυκνότητας μάζας μ, η οποία βρίσκεται υπό σταθερή τάση Τ και έχει το ένα άκρο της σταθερό, ενώ το άλλο είναι στερεωμένο πάνω σε ελατήριο σταθεράς s_o δυνάμενο να κινηθεί μόνο κάθετα στην κατεύθυνση της χορδής. Στη θέση ισορροπίας της η χορδή είναι οριζόντια. Αγνοήστε την δύναμη βαρύτητας.

9. Σημειακή μάζα M είναι τοποθετημένη σε χορδή απείρου μήκους και χαρακτηριστικής αντίστασης Z. Εγκάρσιο κύμα $A\exp[i(kx-\omega t)]$ ανακλάται και εν μέρει διαδίδεται όταν συναντά την μάζα. Από τις οριακές συνθήκες συνέχειας της χορδής και των δυνάμεων επαναφοράς στη θέση της μάζας, υπολογίστε τους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης ενέργειας και αποδείξτε ότι είναι της μορφής $\eta\mu^2\theta$ και $\sigma\upsilon\nu^2\theta$, όπου $\varepsilon\varphi\theta=\omega M/2Z$.

10. Χορδή με ολική μάζα m και μήκος L βρίσκεται υπό τάση T. Το ένα άκρο της στο $x=0$ είναι ακλόνητο, ενώ το άλλο άκρο της στο $x=L$ φέρει δακτύλιο μάζας M, ο οποίος μπορεί να κινείται κάθετα στο άξονα x, κατά μήκος ενός οριζόντιου φορέα παράλληλου στο άξονα y, χωρίς τριβές. Δείξτε ότι οι κανονικές συχνότητες της χορδής δίδονται από τις ρίζες της εξίσωσης $kL\tan(kL)=m/M$.

11. Χορδή με <u>γραμμική πυκνότητα</u> ρ είναι τεντωμένη με δύναμη T. Οταν η χορδή εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους, υφίσταται (λόγω μη ιδανικότητάς της, ή λόγω περιβάλλοντος ρευστού), μία <u>αντίσταση ανά μονάδα μήκους</u> ίση με **rυ**, όπου **υ** η <u>τοπική σωματιδιακή ταχύτητα</u> της χορδής. Δείξτε ότι η κυματική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση της χορδής είναι της μορφής $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\frac{r}{T}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

12. Χορδή μήκους L με ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιων κυμάτων c, είναι στερεωμένη με ακλόνητο το ένα άκρο της έτσι ώστε σε κατάσταση ηρεμίας να εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x. Κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, και ενώ έχουμε απομακρύνει το ελεύθερο άκρο της χορδής κάθετα στον άξονά της, τη σπρώχνουμε προς τη θέση ισορροπίας έτσι ώστε τόσον η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας όσο και η αρχική ταχύτητα να κατανέμονται γραμμικά από το ελεύθερο προς το ακλόνητο άκρο της ράβδου με μέγιστες τιμές a και υ_0 αντίστοιχα.
i) Γράψτε τις αρχικές συνθήκες με τη μορφή $y(x,t=0)=f_1(x)$ και $\dot{y}(x,t=0)=f_2(x)$,
ii) Γράψτε τη συνάρτηση $y(x,t)$ με τη μορφή επαλληλίας κανονικών τρόπων ταλάντωσης, $y(x,t) = \Sigma_n [A_n \cos(k_n x)+ B_n \sin(k_n x)]\sin(\omega_n t+\varphi_n)$,
iii) Εξηγήστε γιατί οι οριακές συνθήκες στα δύο άκρα είναι αντίστοιχα, στο $x=0$ $[y(x=0,t)=0]$ και στο $x=L$ $[dy/dx(x=L,t)=0]$, και εφαρμόστε τις για να υπολογίσετε τις σταθερές A_n και k_n αντίστοιχα
iv) από τις τιμές των k_n υπολογίστε τις συχνότητες όλων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ω_n, και σχεδιάστε την παραμόρφωσης της ράβδου για τις δύο χαμηλώτερες συχνότητες
v) εφαρμόστε τις αρχικές συνθήκες του βήματος (i) για να υπολογίσετε τις υπόλοιπες σταθερές του προβλήματος B_n και φ_n,

3. Σε ένα πείραμα δύο σχισμών που απέχουν μεταξύ τους 1mm και φωτίζονται από μονοχρωματική ακτινοβολία $\lambda=500$ nm, καλύπτουμε τη μία από τις δύο σχισμές με πλακίδιο δείκτη διάθλασης $n=1.5$. Υπολογίστε το πάχος του πλακιδίου έτσι ώστε το κεντρικό μέγιστο (στο επίπεδο παρατήρησης) να μετατοπιστεί στη θέση που βρισκόταν το επόμενο μέγιστο όταν και οι δύο τρύπες ήταν ακάλυπτες.

4. Δέκτης ραδιοφωνικών κυμάτων λαμβάνει ταυτοχρόνως δύο σήματα. Το ένα σήμα προέρχεται κατ' ευθείαν από έναν πομπό ο οποίος απέχει 500 km. Το δεύτερο σήμα προέρχεται από το ίδιο πομπό μέσω ανάκλασής του σε τμήμα της ιονόσφαιρας το οποίο ευρίσκεται σε ύψος 200 km, από την επιφάνεια της γής. Οταν η συχνότητα του εκπεμπόμενου σήματος είναι 10 MHz, στον δέκτη παρατηρείται μία αργή αυξομείωση της έντασης με ρυθμό 6 πλήρης αυξομειώσεις σε ένα λεπτό. Υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα κίνησης της ιονόσφαιρας. Δεχθείτε ότι η επιφάνεια της Γης είναι επίπεδη και ότι η ιονόσφαιρα λειτουργεί, για το εκπεμπόμενο σήμα, ως ιδανικός ανακλαστήρας παράλληλος στην επιφάνειας της Γης.