

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΙΚΡΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι. ΤΣΩΛΑΣ

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

Εφόσον η καμπύλη προσφοράς είναι ευθύγραμμη, εάν θεωρήσουμε ότι $P=f(Q^s)$, θα ισχύει:

$$P = aQ^s + b$$

Η ελαστικότητα προσφοράς θα είναι:

$$\varepsilon_s = (dQ^s/dP) (P/Q^s) = [1/(dP/dQ^s)] (P/Q^s) \Rightarrow \varepsilon_s = (1/a) (P/Q^s) \Rightarrow a = (1/\varepsilon_s) (P/Q^s)$$

Επίσης:

$$P = aQ^s + b \Rightarrow b = P - aQ^s \Rightarrow b = P - Q^s (1/\varepsilon_s) (P/Q^s) \Rightarrow b = P - (P/\varepsilon_s) \Rightarrow$$

$$b = P(1 - (1/\varepsilon_s))$$

Με βάση τα δεδομένα προκύπτουν:

$$a = 10,2 \times 10^{-4}$$

$$b = -0,4286$$

και η συνάρτηση προσφοράς θα είναι:

$$P = 10,2 \times 10^{-4} Q - 0,4286$$

Για την καμπύλη ζήτησης, εφόσον είναι ευθύγραμμη, εάν θεωρήσουμε ότι $P=f(Q^d)$, θα ισχύει:

$$P = a'Q^d + b'$$

Ακολουθώντας την ίδια προσέγγιση προκύπτει ότι:

$$a' = (1/\varepsilon_d) (P/Q^d)$$

$$b' = P(1 - (1/\varepsilon_d))$$

και η συνάρτηση ζήτησης θα είναι:

$$P = -3,861 \times 10^{-4} Q + 1,541$$

Για την καμπύλη προσφοράς, εάν θεωρήσουμε ότι $Q^s = f(P)$, θα ισχύει:

$$Q^s = \alpha P + \beta$$

Η ελαστικότητα προσφοράς θα είναι:

$$\varepsilon_s = (dQ^s/dP) (P/Q^s) \Rightarrow \varepsilon_s = \alpha (P/Q^s) \Rightarrow \alpha = \varepsilon_s Q^s/P$$

Επίσης:

$$Q^s = \alpha P + \beta \Rightarrow \beta = Q^s - \alpha P \Rightarrow \beta = Q^s - \varepsilon_s Q^s \Rightarrow \beta = Q^s (1 - \varepsilon_s)$$

Με βάση τα δεδομένα προκύπτει ότι η συνάρτηση προσφοράς θα είναι:

$$Q^s = 980P + 420$$

Για την καμπύλη ζήτησης, εάν θεωρήσουμε ότι $P=f(Q^d)$, θα ισχύει:

$$Q^d = \alpha'P + \beta'$$

Ακολουθώντας την ίδια προσέγγιση προκύπτει ότι:

$$\alpha' = \varepsilon_d Q^d/P$$

$$\beta' = Q^d (1 - \varepsilon_d)$$

και η συνάρτηση ζήτησης θα είναι:

$$Q^d = -2590P + 3990$$

Άσκηση 2

Όταν οι συναρτήσεις προσφοράς και ζήτησης δοθούν με την αλγεβρική τους μορφή τότε τα μεγέθη ισορροπίας (τιμή και ποσότητα ισορροπίας) προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων.

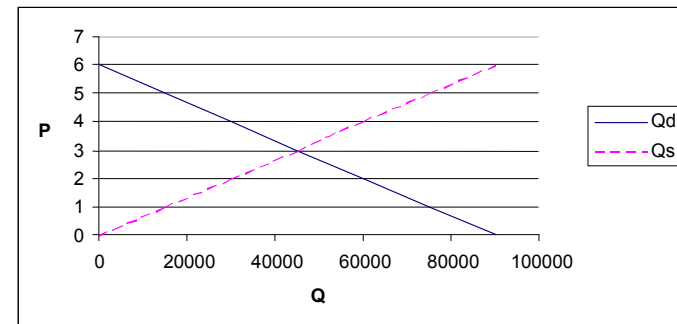
Σε περίπτωση μεταβολής μιας ή και των δύο συναρτήσεων επιλύονται εκ νέου τα νέα συστήματα εξισώσεων.

α. Τα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς είναι:

$$P_e = 3$$

$$Q_e = 45000$$

όπου P_e = τιμή ισορροπίας και Q_e = ποσότητα ισορροπίας (βλ. επίσης σχήμα 1)



Σχήμα 1.

β. Για τη διερεύνηση του είδους της ισορροπίας (ευσταθής ή ασταθής) καταγράφονται οι πιέσεις (αυξητικές ή πτωτικές) στις τιμές για αύξηση και μείωση της τιμής πέραν της τιμής ισορροπίας. Εάν η άσκηση των πιέσεων στις τιμές σε μια θέση μη ισορροπίας απομακρύνει το σύστημα της αγοράς περισσότερο από την αρχική θέση ισορροπίας η ισορροπία στην αγορά είναι ασταθής, ενώ εάν συμβαίνει το αντίθετο, δηλ. η άσκηση των πιέσεων στις τιμές επαναφέρει το σύστημα της αγοράς από μια θέση μη ισορροπίας στην αρχική θέση ισορροπίας, η ισορροπία στην αγορά είναι ευσταθής.

Η αύξηση της τιμής πέραν της τιμής ισορροπίας δημιουργεί υπερβάλλουσα προσφορά ($Q_s - Q_d > 0$) με αποτέλεσμα την άσκηση πτωτικών πιέσεων στις τιμές και η μείωση της τιμής πέραν της τιμής ισορροπίας δημιουργεί υπερβάλλουσα ζήτηση ($Q_s - Q_d < 0$) με αποτέλεσμα την άσκηση αυξητικών πιέσεων στις τιμές. Και στις δυο περιπτώσεις η άσκηση των πιέσεων στις τιμές επαναφέρει το σύστημα της αγοράς από μια θέση μη ισορροπίας στην αρχική θέση ισορροπίας και για το λόγο αυτό η ισορροπία στην αγορά είναι ευσταθής (βλ. πίνακα 1).

Πίνακας 1.

Qd	P	Qs	Qs-Qd	ΠΙΕΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΙΜΗ
0	6	90000	90000	↓
15000	5	75000	60000	↓
30000	4	60000	30000	↓
45000	3	45000	0	
60000	2	30000	-30000	↑
75000	1	15000	-60000	↑
90000	0	0	-90000	↑

γ. Τα νέα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς είναι:

$$P_e = 4$$

$$Q_e = 60000$$

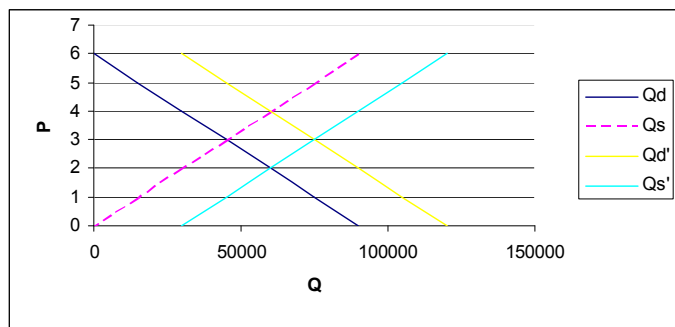
όπου P_e = τιμή ισορροπίας και Q_e = ποσότητα ισορροπίας (βλ. επίσης σχήμα 2)

δ. Τα νέα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς είναι:

$$P_e = 3$$

$$Q_e = 75000$$

όπου P_e = τιμή ισορροπίας και Q_e = ποσότητα ισορροπίας (βλ. επίσης σχήμα 2)



Σχήμα 2.

Άσκηση 3

α. Για τον προσδιορισμό των ποσοτήτων των καλαθιών αγαθών (προϊόντων) που αγοράζει ο καταναλωτής έτσι ώστε να μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του απαιτείται η εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας του καταναλωτή και η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2):

$$OΛΥ_{xy} = P_x/P_y, \quad OΛΥ_{xy} = MU_x/MU_y \quad \text{άρα } MU_x/MU_y = P_x/P_y \quad (1)$$

$$10x + 12y = 880 \quad (2)$$

όπου $OΛΥ_{xy}$ ο οριακός λόγος υποκατάστασης του X από το Y , MU_x, MU_y οι οριακές χρησιμότητες, P_x, P_y οι τιμές και x, y οι ποσότητες των αγαθών X και Y .

Με βάση τη συνάρτηση συνολικής χρησιμότητας ισχύουν:

$$MU_x = y^{1,2}$$

$$MU_y = 1,2 \cdot x \cdot y^{0,2}$$

Και με βάση την (1) προκύπτει $x=y$. Με βάση την τελευταία σχέση και την (2) προκύπτει τελικά:

$$x=40$$

$$y=40$$

Εναλλακτικά, για τη μεγιστοποίηση της χρησιμότητας μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

Επιλύουμε τον εισοδηματικό περιορισμό ως προς μια μεταβλητή, έστω την x :

$$10x + 12y = 880$$

$$x = 88 - 1,2y$$

και αντικαθιστούμε στη συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U = (88 - 1,2y) \cdot y^{1,2}$$

$$U = 88 \cdot y^{1,2} - 1,2 \cdot y^{2,2}$$

$$\text{Απαιτείται η μεγιστοποίηση της } U(y) = 88 \cdot y^{1,2} - 1,2 \cdot y^{2,2}.$$

Για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση $U(y)$ πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

Μεγιστοποίηση $U(y)$	
Συνθήκη Α' τάξεως	$\frac{dU}{dy} = 0$
Συνθήκη Β' τάξεως	$\frac{d^2U}{dy^2} < 0$

Εφαρμόζοντας τη συνθήκη Α' τάξεως προκύπτει $y=40$. Η συνθήκη Β' τάξεως ισχύει για $y=40$.

Από τη σχέση $10x + 12y = 880$, για $y=40$ προκύπτει $x=40$.

β. Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ένα σημείο της καμπύλης ζήτησης $(P_x, Q_x) = (10, 40)$.

Θεωρώντας ότι έστω ότι $P_x=20$ με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται ένα ακόμη σημείο της καμπύλης: $(P_x', Q_x') = (20, 20)$ και από τα δύο σημεία εξάγεται η καμπύλη ζήτησης.

Άσκηση 4

$$\alpha. Q = L + 2KL \Rightarrow K = (Q - L)/2L$$

Για $Q = \bar{Q}$ ισχύει:

$$K(L) = (\bar{Q} - L) / 2L, \quad L \leq \bar{Q}$$

Ισχύουν επίσης $dK/dL < 0$ και $d^2K/dL^2 > 0$ και η $K(L)$ τέμνει τον άξονα της εργασίας (L) στο σημείο $L = \bar{Q}$.

Για διάφορες τιμές του επιπέδου παραγωγής προκύπτουν οι συναρτήσεις των καμπυλών ισοπαραγωγής.

Π.χ. για $\bar{Q}=1$ ισχύει: $K(L) = (1-L)/2L = 1/2L - 1/2$

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζονται οι καμπύλες ισοπαραγωγής.

β. Έστω ότι L, K αυξάνονται σε aL και aK αντίστοιχα, $a>1$.

Τότε υπολογίζονται τα :

$f(aL, aK)$ και

$af(L, K)$

Εάν

$af(L, K) = f(aL, aK)$ τότε η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

$af(L, K) < f(aL, aK)$ τότε η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.

$af(L, K) > f(aL, aK)$ τότε η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας.

Με βάση τα δεδομένα προκύπτει ότι:

$f(aL, aK) = aL + 2a^2LK = aL + 2aLK + 2aLK(a-1) = af(L, K) + 2aLK(a-1) > af(L, K)$

Επομένως η συγκεκριμένη συνάρτηση παραγωγής ακολουθεί αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.

Άσκηση 5

α. Η βραχυχρόνια συνάρτηση κόστους της επιχείρησης δίνεται από τη σχέση:

$$TC = wL + rK = wQ^2/4K_0 + rK_0$$

β. Το οριακό κόστος δίνεται από τη σχέση:

$$MC = dTC/dQ = 2Qw/4K_0$$

γ. Το οριακό προϊόν της εργασίας δίνεται από τη σχέση:

$$MP_L = dQ/dL = K^{0.5} L^{-0.5}$$

δ. Η συνάρτηση παραγωγής είναι τύπου Cobb-Douglas: $Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$, $\alpha+\beta=1$ (αφού $\alpha=\beta=0.5$) και ακολουθεί σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Στη γενική περίπτωση μιας συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas: $Q = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta$

$$f(\lambda L, \lambda K) = A \cdot (\lambda K)^\alpha \cdot (\lambda L)^\beta =$$

$$= A \cdot \lambda^\alpha K^\alpha \cdot \lambda^\beta L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} f(L, K)$$

Άρα

εάν $\alpha+\beta=1 \Rightarrow f(\lambda L, \lambda K) = \lambda Q$: σταθερές αποδόσεις κλίμακας

εάν $\alpha+\beta<1 \Rightarrow f(\lambda L, \lambda K) < \lambda Q$: φθίνουσες αποδόσεις κλίμακας

εάν $\alpha+\beta>1 \Rightarrow f(\lambda L, \lambda K) > \lambda Q$: αύξουσες αποδόσεις κλίμακας

Άσκηση 6

α. Τα μεγέθη ισορροπίας της αγοράς (P_e = τιμή ισορροπίας και Q_e = ποσότητα ισορροπίας) υπολογίζονται αλγεβρικά επιλύοντας τη σχέση:

$$Q^s = Q^d$$

Τελικά προκύπτει: $P = P_e = 1000$

Και επομένως $Q^s = Q^d = Q_e = 6000$

β.

$$\pi(q) = TR(q) - TC(q)$$

$TR(q) = Pq = 1000q$ (αφού στον πλήρη ανταγωνισμό η τιμή καθορίζεται από την αγορά)

$$TC(q) = TC(q) = 10q^2 + 20q + 1000$$

Επομένως:

$$\pi(q) = TR(q) - TC(q) = 1000q - (10q^2 + 20q + 1000) = -10q^2 + 980q - 1000$$

Για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση $\pi(q) = -10q^2 + 980q - 1000$ πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

Μεγιστοποίηση $\pi(q)$	
Συνθήκη Α' τάξεως	$\frac{d\pi}{dq} = 0$
Συνθήκη Β' τάξεως	$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες προκύπτει το άριστο επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης $q^* = 49$.

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από τον κανόνα εξίσωσης του οριακού εσόδου με το οριακό κόστος: $MR=MC$ (ισοδύναμη συνθήκη της παραπάνω συνθήκης Α' τάξεως). Η ισοδύναμη της παραπάνω συνθήκης Β' τάξεως: $dMC/dq > 0$ ισχύει.

γ. Η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη εάν $\pi(q^*) > 0$ και ζημιές εάν $\pi(q^*) < 0$.

Προκύπτει $\pi(q^*) = 23010$. Άρα η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη.

δ. Για τη συμπεριφορά της επιχείρησης στη βραχυχρόνια περίοδο τίθεται θέμα διακοπής της λειτουργίας της μόνον όταν πραγματοποιεί ζημιές για το επίπεδο του βαθμού δραστηριότητας που μεγιστοποιεί το οικονομικό αποτέλεσμα. Τότε, ένας από τους τρόπους προσέγγισης του θέματος αυτού είναι να συγκριθεί η τιμή με το μέσο μεταβλητό κόστος και εάν είναι μεγαλύτερη από αυτό τότε η επιχείρηση μπορεί να συνεχίζει να λειτουργεί, διαφορετικά θα πρέπει να διακόψει τη λειτουργία της.

Εφόσον η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη θα συνεχίσει να λειτουργεί.

Άσκηση 7

Το συνολικό κέρδος της επιχείρησης δίνεται από τη σχέση

$$\pi(q) = TR(q) - TC(q) = -q^3 + 12q^2 - 29,25q - 130$$

Από τη συνθήκη Α' τάξεως προκύπτει:

$$q_1 = 1,5 \text{ και } q_2 = 6,5$$

Η λύση $q_2 = 6,5$ ικανοποιεί τη συνθήκη Β' τάξεως. Άρα το άριστο επίπεδο παραγωγής είναι το $q^* = 6,5$.

Για να εξετάσουμε εάν η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη ή ζημιές μπορούμε να συγκρίνουμε την τιμή (=οριακό έσοδο) με το συνολικό μέσο κόστος AC.

$$AC = TC/q = q^2 - 12q + 60 + 130/q$$

Για $q = 6,5$, $AC = 44,25$

$AC = 44,25 > P = 30,75$ άρα το οικονομικό αποτέλεσμα είναι: $(P-AC)q = (30,75 - 44,25) \times 6,5 = -87,75$ και επομένως η επιχείρηση πραγματοποιεί ζημιές.
Εφόσον η επιχείρηση πραγματοποιεί ζημιές θα πρέπει να συγκρίνουμε το μέσο μεταβλητό κόστος με την τιμή:
 $AVC = VC/q = q^2 - 12q + 60 = 24,25$
 $P=30,75 > AVC=24,25$ και άρα η επιχείρηση πρέπει να συνεχίσει τη λειτουργία της.

Άσκηση 8

α. Το νεκρό σημείο είναι το επίπεδο παραγωγής (βαθμός δραστηριότητας) για το οποίο το οικονομικό αποτέλεσμα, $\pi(q) = 0$.
 $\pi(q) = TR(q) - TC(q)$
όπου $TR(q)$ = συνολικά έσοδα και $TC(q)$ = συνολικό κόστος
 $TR(q) = Pq = (50 - 0,0005q)q = 50q - 0,0005q^2$
 $TC(q) = TC(q) = 101250 + 2q + 0,0025q^2$

Επομένως για $\pi(q) = 0$ έχουμε: $q_1 = 13500$, $q_2 = 2500$.
Δεδομένου ότι η δυναμικότητα παραγωγής είναι 10000 μονάδες προϊόντος η λύση q_1 απορρίπτεται και επομένως το νεκρό σημείο αντιστοιχεί σε επίπεδο παραγωγής 2500 μονάδων προϊόντος.

Η τιμή πώλησης για το επίπεδο παραγωγής των 2500 μονάδων προϊόντος αφού $P = 50 - 0,0005q$ θα είναι: $P = 48,75$

β. Για την εύρεση του βαθμού δραστηριότητας στον οποίο η επιχείρηση μεγιστοποιεί το οικονομικό αποτέλεσμα απαιτείται η μεγιστοποίηση της συνάρτησης του οικονομικού αποτελέσματος $\pi(q)$.

Για να μεγιστοποιείται η συνάρτηση $\pi(q)$ πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

Μεγιστοποίηση $\pi(q)$	
Συνθήκη Α' τάξεως	$\frac{d\pi}{dq} = 0$
Συνθήκη Β' τάξεως	$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και από τον κανόνα εξίσωσης του οριακού εσόδου με το οριακό κόστος (ισοδύναμη συνθήκη της παραπάνω συνθήκης Α' τάξεως). Η συνθήκη Β' τάξεως είναι ισοδύναμη με την $dMR/dq < dMC/dq$.

$$\pi(q) = -0,003q^2 + 48q - 101250$$

Συνθήκη Α' τάξεως

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \rightarrow -0,006q + 48 = 0 \rightarrow q = 8000$$

Η λύση $q = 8000$ ικανοποιεί τη συνθήκη Β' τάξεως. Επομένως το άριστο επίπεδο παραγωγής της επιχείρησης είναι: $q^* = 8000$.

Το οικονομικό αποτέλεσμα για την τιμή q^* είναι το $\pi(q^*)$. Η επιχείρηση πραγματοποιεί κέρδη εάν $\pi(q^*) > 0$ και ζημιές εάν $\pi(q^*) < 0$.

Το ύψος των ζημιών/κερδών είναι: $\pi(q^*) = 90750$. Άρα η επιχείρηση έχει κέρδος $= 90750$.

γ. Η ελαστικότητα ζήτησης του προϊόντος της επιχείρησης (ϵ_d) στο σημείο μεγιστοποίησης του οικονομικού της αποτελέσματος δίνεται από τη σχέση:

$$\epsilon_d = (dq/dP) (P/q) = [1/(dP/dq)] (P/q)$$

$$P = 46$$

$$q = 8000$$

$$\text{Άρα } \epsilon_d = -11,5$$

Άσκηση 9

Έστω n ο αριθμός των επιχειρήσεων στην αγορά.

Τότε ισχύει:

$$\text{Αγοραία προσφορά: } Q^s = q_1^s(P) + q_2^s(P) + \dots + q_n^s(P)$$

Για την κάθε επιχείρηση ισχύει:

$$P = MC(q)$$

$$TC = 16 + q^2$$

Επομένως προκύπτει η $q^s(P)$ η οποία είναι $q^s(P) = P/2$

Στο σύνολο της αγοράς θα ισχύει:

$$Q^s = n q^s(P)$$

$$Q^d = 24 - P$$

Και στο σημείο ισορροπίας θα πρέπει:

$$Q^s = Q^d$$

Και προκύπτει η P και κατόπιν η $q^s(P)$. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει $P = 48/(n+2)$ και $q = 24/(n+2)$.

Για να παραμείνει μια επιχείρηση στην αγορά πρέπει:

$$P = AC$$

$$P = 2q$$

$$AC = 16/q + q$$

Και από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ως αποδεκτή λύση η $q = 4$.

Αφού $q = 24/(n+2)$ προκύπτει ότι ο αριθμός των επιχειρήσεων που παραμένουν στην αγορά είναι 4 επιχειρήσεις.