ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ, ΟΠΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ ΚΑΙ ΥΠΕΡΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 26/3/2009

1) Ένας πυκνωτής με παράλληλες πλάκες που απέχουν 1,00 mm είναι αρχικά συνδεδεμένος με πηγή 1000 V. Στη συνέχεια αποσυνδέεται από την πηγή και ανάμεσα στις πλάκες τοποθετείται ένα διηλεκτρικό υλικό με πάχος 0,90 mm που ισαπέχει από τις δύο πλάκες. Η μέτρηση της διαφοράς δυναμικού ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή βρίσκεται ότι είναι 675 V. Ποια είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού αυτού;

2) Θεωρήστε έναν πυκνωτή με παράλληλες φορτισμένες πλάκες με επιφανειακή πυκνότητα $+\sigma$ και $-\sigma$ αντιστοίχως. Η περιοχή ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή είναι γεμάτη με άμορφο σελήνιο (Se) που έχει (αριθμητική) πυκνότητα $3{,}67 \times 10^{28}$ άτομα/m^3 και σχετική διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_r = 6{,}0$. (α) Να υπολογίσετε την πολωσιμότητα του ατόμου του σεληνίου. (β) Να βρείτε το τοπικό πεδίο, E_{loc} σε ένα άτομο του σεληνίου για την περίπτωση που οι φορτισμένες πλάκες του πυκνωτή δημιουργούν ένα πεδίο 1500 V/m. (γ) Να βρείτε τη διπολική ροπή ενός ατόμου του σεληνίου στο τοπικό πεδίο που βρήκατε στο ερώτημα (β).

3) Θεωρήστε έναν κρύσταλλο που έχει πλέγμα Bravais με απλή τετραγωνική δομή ($\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{b} = a\hat{\mathbf{y}}$ και $\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{z}}$, όπου $2^{1/2}a>c>a$) και υποθέσετε ότι το κάθε άτομο έχει την ίδια διπολική ροπή $\boldsymbol{p}$. (α) Να δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλούν σε ένα άτομο οι διπολικές ροπές που βρίσκονται σε σφαίρα με ακτίνα R από αυτό (όπου $a<R<c$) είναι $(1/2\pi\varepsilon_o)(\boldsymbol{p}-3p_z\hat{\mathbf{z}})/a^3$. (β) Να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλούν στο άτομο αυτό οι διπολικές ροπές που βρίσκονται σε σφαίρα με ακτίνα R από αυτό (όπου $2a>R>c$). (γ) Να δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που βρήκατε στο ερώτημα (β) μηδενίζεται όταν a=c, δηλαδή όταν το πλέγμα γίνεται απλό κυβικό. *Να επαναλάβετε τα (α) και (β) για την περίπτωση* $2a>c>2^{1/2}a$.

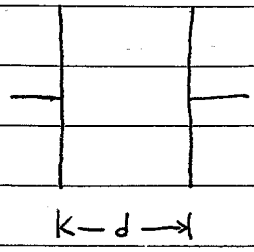
4) Θεωρήστε έναν κρύσταλλο που έχει πλέγμα Bravais με απλή τετραγωνική δομή ($\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{b} = a\hat{\mathbf{y}}$ και $\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{z}}$, όπου $2^{1/2}a >c>a$) και υποθέσετε ότι σε στατικό ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ το κάθε άτομο έχει την ίδια διπολική ροπή $\boldsymbol{p}= \alpha \boldsymbol{E}_{loc}$ και ότι η πόλωση είναι $\mathbf{P} = \boldsymbol{p}/a^2c$.

(α)Να δείξετε ότι $E_{loc\,(x)} = E_x/A$, $E_{loc\,(y)} = E_y/A$, και $E_{loc\,(z)} = E_z/B$, όπου $A = 1-(\alpha/[3\varepsilon_o a^2 c]) - (\alpha/[2\pi\varepsilon_o]\,(1/a^3 - 1/c^3)$ και $B = 1-(\alpha/[3\varepsilon_o a^2 c]) + (\alpha/[\pi\varepsilon_o]\,(1/a^3 - 1/c^3)$. (β) Να βρείτε τα μη μηδενικά στοιχεία του τανυστή διηλεκτρικής επιδεκτικότητας x_{ij}. *Να επαναλάβετε τα (α) και (β) για την περίπτωση* $2a>c>2^{1/2}a$.

(γ) Να υπολογίσετε τις τιμές των x_{xx} και x_{yy} για $\alpha = 10^{-40}$ C^{2}m/N, a = 5,0 Å και c = 9,0 Å.

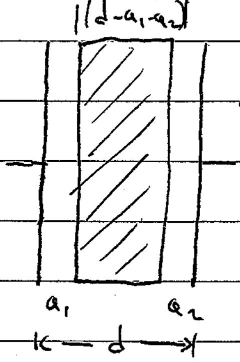
1) Ένας πυκνωτής με παράλληλες πλάκες που απέχουν 1,00 mm είναι αρχικά συνδεδεμένος με πηγή 1000 V. Στη συνέχεια αποσυνδέεται από την πηγή και ανάμεσα στις πλάκες τοποθετείται ένα διηλεκτρικό υλικό με πάχος 0,90 mm που ισαπέχει από τις δύο πλάκες. Η μέτρηση της διαφοράς δυναμικού ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή βρίσκεται ότι είναι 675 V. Ποια είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού αυτού;

Αρχικά:



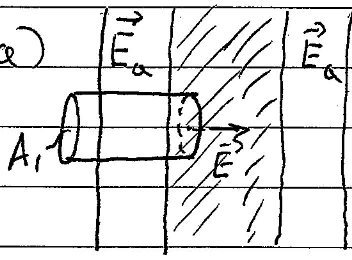
$$V_0 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{V_0}{d}.$$

Όταν μπει το διηλεκτρικό:



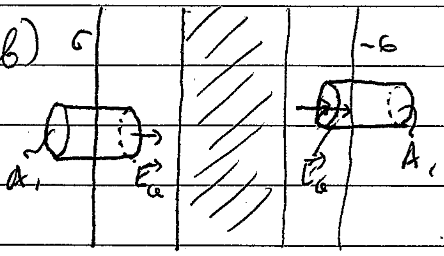
$\Rightarrow$ Εφαρμόζουμε το νόμο του Gauss:

a)



$$\varepsilon_r E A_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\sigma}{A_1} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0}\hat{x}.$$

b)



$$E_a A_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_a = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}.$$

$$V = E_a a_1 + E(d-(a_1+a_2)) + E_a a_2 = E_a(a_1+a_2) + E(d-(a_1+a_2))$$
$$= E_a a + E(d-a) \quad \text{όπου} \quad a = a_1 + a_2.$$

$$\therefore V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}a + \frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}(d-a) = \frac{V_0}{d}\left(a + \frac{d-a}{\varepsilon_r}\right).$$

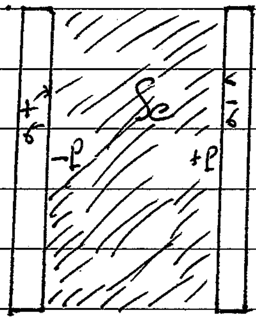
$$\frac{V}{V_0}d - a = \frac{d-a}{\varepsilon_r} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{d-a}{\left(\frac{V}{V_0}d - a\right)}.$$

$d = 10^{-3}\,m$, $a = 10^{-4}\,m$, $V_0 = 1000\,V$, $V = 675\,V$.

$$\therefore \varepsilon_r = \frac{d-a}{\left(\frac{V}{V_0}d - a\right)} = \frac{0{,}9 \times 10^{-3}}{[(0{,}675) - 0{,}1]10^{-3}} = \frac{0{,}9}{0{,}575} \simeq 1{,}57$$

2) Θεωρήστε έναν πυκνωτή με παράλληλες φορτισμένες πλάκες με επιφανειακή πυκνότητα $+\sigma$ και $-\sigma$ αντιστοίχως. Η περιοχή ανάμεσα στις πλάκες του πυκνωτή είναι γεμάτη με άμορφο σελήνιο (Se) που έχει (αριθμητική) πυκνότητα $3{,}67 \times 10^{28}$ άτομα/m^3 και σχετική διηλεκτρική σταθερά $\varepsilon_r = 6{,}0$. (α) Να υπολογίσετε την πολωσιμότητα του ατόμου του σεληνίου. (β) Να βρείτε το τοπικό πεδίο, E_{loc} σε ένα άτομο του σεληνίου για την περίπτωση που οι φορτισμένες πλάκες του πυκνωτή δημιουργούν ένα πεδίο 1500 V/m. (γ) Να βρείτε τη διπολική ροπή ενός ατόμου του σεληνίου στο τοπικό πεδίο που βρήκατε στο ερώτημα (β).

Από τη σχέση Clausius-Mossotti,



α) $\alpha_{Se} = \dfrac{3\varepsilon_0}{N}\,\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \dfrac{3\times 8{,}85\times10^{-12}}{3{,}67\times10^{28}}\cdot\dfrac{5}{8}$

$= 4{,}5\times10^{-40}\ \left(\dfrac{C^2 m}{N}\right)$

β) $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{P}/\varepsilon_0$, $\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \vec{P}/3\varepsilon_0$

$= \vec{E} + \dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{3\varepsilon_0}\vec{E} = \dfrac{\varepsilon_r + 2}{3}\vec{E}.$

$\vec{E} = \vec{E}_0 - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\right)\vec{E} = \vec{E}_0 - (\varepsilon_r - 1)\vec{E}.$

Άρα: $\vec{E} = \vec{E}_0 - \varepsilon_r\vec{E} + \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}.$

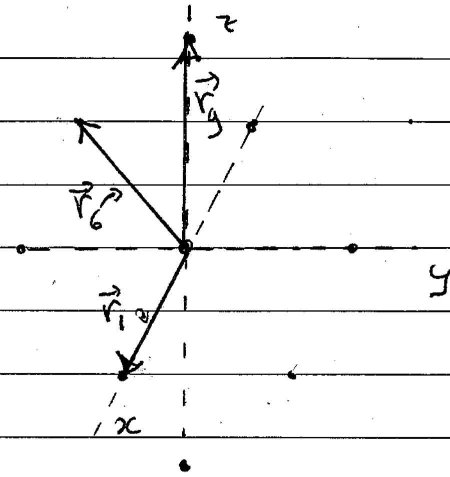
$E = \dfrac{1500\,V/m}{6} = 250\ \dfrac{V}{m}$

και $E_{loc} = \dfrac{8}{3}\cdot 250 = 670\ \dfrac{V}{m}.$

$\boxed{E = 250\,V/m}$, $\boxed{E_{loc} = 670\ V/m}$

γ) $p = \alpha_{Se}E_{loc} = 4{,}5\times10^{-40}\times 670 = 3\times10^{-37}\ C\cdot m.$

3) Θεωρήστε έναν κρύσταλλο που έχει πλέγμα Bravais με απλή τετραγωνική δομή ($\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{b} = a\hat{\mathbf{y}}$ και $\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{z}}$, όπου $2^{1/2}a>c>a$) και υποθέσετε ότι το κάθε άτομο έχει την ίδια διπολική ροπή $\boldsymbol{p}$. (α) Να δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλούν σε ένα άτομο οι διπολικές ροπές που βρίσκονται σε σφαίρα με ακτίνα R από αυτό (όπου $a<R<c$) είναι $(1/2\pi\varepsilon_o)(\boldsymbol{p}-3p_z\hat{\mathbf{z}})/a^3$. (β) Να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλούν στο άτομο αυτό οι διπολικές ροπές που βρίσκονται σε σφαίρα με ακτίνα R από αυτό (όπου $2a>R>c$). (γ) Να δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που βρήκατε στο ερώτημα (β) μηδενίζεται όταν a=c, δηλαδή όταν το πλέγμα γίνεται απλό κυβικό. *Να επαναλάβετε τα (α) και (β) για την περίπτωση $2a>c>2^{1/2}a$.*



Το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλούν τα N δίπολα στο σημείο O είναι:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{3(\vec{p}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{r}_i - r_i^2\vec{p}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^5}$$

$\vec{r}_1 = a\hat{x}$, $\vec{r}_2 = -a\hat{x}$, $\vec{r}_3 = a\hat{y}$, $\vec{r}_4 = -a\hat{y}$

$\vec{r}_5 = a(\hat{x}+\hat{y})$, $\vec{r}_6 = -a(\hat{x}+\hat{y})$, $\vec{r}_7 = a(\hat{x}-\hat{y})$, $\vec{r}_8 = -a(\hat{x}-\hat{y})$

$\vec{r}_9 = c\hat{z}$, $\vec{r}_{10} = -c\hat{z}$. $\vec{p}_i = \vec{p}$ για όλα τα i.
$(\vec{p} = p_x\hat{x} + p_y\hat{y} + p_z\hat{z})$

(I) $\boxed{\sqrt{2}a > c > a}$

α) $c>R>a$: Συνεισφέρουν τέσσερα δίπολα που βρίσκονται στις θέσεις $\pm a\hat{x}$, $\pm a\hat{y}$ (δηλαδή στις θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ και $\vec{r}_4$. $|\vec{r}_i| = a$ για $i=1,2,3,4$.

$$\vec{E}(O_4) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^5}\Big\{(3p_x a)a\hat{x} + (-3p_x a)(-a\hat{x}) + (3p_y a)a\hat{y} + (-3p_y a)(-a\hat{y}) - 4a^2(p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\Big\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\Big\{3(p_x\hat{x}+p_y\hat{y}) - 2(p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\Big\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\Big\{p_x\hat{x}+p_y\hat{y} - 2p_z\hat{z}\Big\} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\Big\{\vec{p} - 3p_z\hat{z}\Big\}$$

β) Όταν $\sqrt{2}a > R > c$, συνεισφέρουν έξι δίπολα:
Τα τέσσερα του μέρους Ια, καθώς και τα $\vec{r}_9$, $\vec{r}_{10}$ (που βρίσκονται στις θέσεις $\pm c\hat{z}$).

Τότε, $$\vec{E}(\sigma_6) = \sum_{i=1}^{6} \frac{3(\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i - r_i^2 \vec{p}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^5} = \vec{E}(\sigma_4) + \vec{E}(\sigma_{9,10})$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\left\{\vec{p} - 3p_z\hat{z}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^5}\left\{(3p_z c)c\hat{z} + 3(-p_z c)(-c\hat{z}) - 2c^2\vec{p}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\left\{\vec{p} - 3p_z\hat{z}\right\} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^3}\left\{3p_z\hat{z} - \vec{p}\right\}$$

$$= \frac{(\vec{p} - 3p_z\hat{z})}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{c^3}\right)$$

γ) Όταν $c = a$, τότε $\frac{1}{a^3} - \frac{1}{c^3} = 0$

και άρα $\vec{E}(\sigma_6) = 0$.

II $\boxed{2a > c > \sqrt{2}a}$

α) $\sqrt{2}a > R > a$

Συνεισφέρουν τα τέσσερα δίπολα ($\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ και $\vec{r}_4$), όπως στην περίπτωση Ια.

β) $c > R > \sqrt{2}a$: Συνεισφέρουν οκτώ δίπολα:
$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{r}_5, \vec{r}_6, \vec{r}_7, \vec{r}_8$.

Τότε, $\vec{E}(\sigma_8) = \vec{E}(\sigma_4) + \vec{E}(\sigma_{5,6,7,8})$.

$|\vec{r}_5| = |\vec{r}_6| = |\vec{r}_7| = |\vec{r}_8| = \sqrt{2}a$.

$$(\vec{p}\cdot\vec{r}_5)\vec{r}_5 = \left((p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\cdot a(\hat{x}+\hat{y})\right)a(\hat{x}+\hat{y})$$
$$= a^2(p_x+p_y)(\hat{x}+\hat{y})$$
$$(\vec{p}\cdot\vec{r}_6)\vec{r}_6 = \left((p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\cdot a(-\hat{x}-\hat{y})\right)a(-\hat{x}-\hat{y}) =$$
$$= a^2(p_x+p_y)(\hat{x}+\hat{y}).$$

$$(\vec{p}\cdot\vec{r}_7)\vec{r}_7 = \left((p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\cdot a(\hat{x}-\hat{y})\right)a(\hat{x}-\hat{y}) =$$
$$= a^2(p_x-p_y)(\hat{x}-\hat{y})$$
$$(\vec{p}\cdot\vec{r}_8)\vec{r}_8 = \left((p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\cdot a(-\hat{x}+\hat{y})\right)a(-\hat{x}+\hat{y})$$
$$= a^2(p_x-p_y)(\hat{x}-\hat{y}).$$

$$\therefore \vec{E}(O_{5,6,7,8}) = \sum_{i=5}^{8}\frac{3(\vec{p}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{r}_i - r_i^2\vec{p}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^5} =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 2^{5/2}a^5}\left\{6a^2\left((p_x+p_y)(\hat{x}+\hat{y})+(p_x-p_y)(\hat{x}-\hat{y})\right) - 8a^2(p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 2^{5/2}a^3}\left\{3\left(p_x\hat{x}+\cancel{p_y\hat{x}}+\cancel{p_x\hat{y}}+p_y\hat{y}+p_x\hat{x}-\cancel{p_y\hat{x}}-\cancel{p_x\hat{y}}+p_y\hat{y}\right) - 4(p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 2^{5/2}a^3}\left\{6(p_x\hat{x}+p_y\hat{y}) - 4(p_x\hat{x}+p_y\hat{y}+p_z\hat{z})\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 2^{3/2}a^3}\left\{\vec{p}-3p_z\hat{z}\right\}.$$

Άρα: $\vec{E}(O_8) = \vec{E}(O_4) + \vec{E}(O_{5,6,7,8}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\left(1+\frac{1}{2^{3/2}}\right)(\vec{p}-3p_z\hat{z}).$

γ) $2a > R > c$ Συνεισφέρουν δέκα δίπολα

$$\vec{E}(O_{10}) = \vec{E}(O_8) + \vec{E}_{O_{9,10}} = \frac{(\vec{p}-3p_z\hat{z})}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2^{3/2}a^3}-\frac{1}{c^3}\right\}$$

4) Θεωρήστε έναν κρύσταλλο που έχει πλέγμα Bravais με απλή τετραγωνική δομή ($\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{b} = a\hat{\mathbf{y}}$ και $\mathbf{c} = c\hat{\mathbf{z}}$, όπου $2^{1/2}a > c > a$) και υποθέσετε ότι σε στατικό ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ το κάθε άτομο έχει την ίδια διπολική ροπή $\boldsymbol{p} = \alpha\, \boldsymbol{E}_{loc}$ και ότι η πόλωση είναι $\mathbf{P} = \boldsymbol{p}/a^2c$.

(α)Να δείξετε ότι $E_{loc\,(x)} = E_x/A$, $E_{loc\,(y)} = E_y/A$, και $E_{loc\,(z)} = E_x/B$, όπου $A = 1-(\alpha/[3\varepsilon_o a^2c]) - (\alpha/[2\pi\varepsilon_o])\,(1/a^3 - 1/c^3)$ και $B = 1-(\alpha/[3\varepsilon_o a^2c]) + (\alpha/[\pi\varepsilon_o])\,(1/a^3 - 1/c^3)$. (β) Να βρείτε τα μη μηδενικά στοιχεία του τανυστή διηλεκτρικής επιδεκτικότητας x_{ij}. *Να επαναλάβετε τα (α) και (β) για την περίπτωση $2a>c>2^{1/2}a$.*

(γ) Να υπολογίσετε τις τιμές των x_{xx} και x_{yy} για $\alpha = 10^{-40}$ C^2m/N, a = 5,0 Å και c = 9,0 Å.

Για να υπολογίσουμε το τοπικό ηλεκτρικό πεδίο σε ένα άτομο στη θέση O, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\vec{E}_{loc} = \underbrace{\vec{E}}_{\text{ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΟ ΠΕΔΙΟ}} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} + \vec{E}_3 .$$

Το $\vec{E}_3$ είναι το πεδίο στο O που υπολογίζεται μικροσκοπικά από τις συνεισφορές των διπόλων που βρίσκονται μέσα σε σφαίρα με ακτίνα R από το O. Η σφαίρα θέλουμε να περιλαμβάνει (εκτός από το O) τα πλησιέστερα σημεία $\vec{r}_1 = a\hat{x}$, $\vec{r}_2 = -a\hat{x}$, $\vec{r}_3 = -a\hat{y}$, $\vec{r}_4 = a\hat{y}$, $\vec{r}_9 = c\hat{z}$, $\vec{r}_{10} = -c$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις (από το πρόβλημα 3).

a) $\sqrt{2}a > c > a$ και $c < R < \sqrt{2}a$

Τότε $\vec{E}_3 = \vec{E}(O_6) = \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{c^3}\right)\frac{(\vec{P} - 3P_z\hat{z})}{2\pi\varepsilon_0} = \lambda_1 \frac{(\vec{P} - 3P_z\hat{z})}{2\pi\varepsilon_0}$

b) $2a > c > \sqrt{2}a$ και $c < R < 2a$

Τότε $\vec{E}_3 = \vec{E}(O_{10}) = \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{2^{3/2}a^3} - \frac{1}{c^3}\right)\frac{\vec{P} - 3P_z\hat{z}}{2\pi\varepsilon_0} = \lambda_2 \frac{(\vec{P} - 3P_z\hat{z})}{2\pi\varepsilon_0}.$

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{loc} \quad , \quad \vec{P} = \frac{\vec{p}}{a^2 c} \quad \Rightarrow \vec{P} = \frac{\alpha \vec{\mathcal{E}}_{loc}}{a^2 c}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{loc} = \vec{\mathcal{E}} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} + \frac{\lambda_i}{2\pi\varepsilon_0}(\vec{p} - 3p_z \hat{z})$$

$$= \vec{\mathcal{E}} + \frac{\alpha}{3\varepsilon_0 a^2 c}\vec{\mathcal{E}}_{loc} + \frac{\lambda_i \alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\vec{\mathcal{E}}_{loc} - 3\mathcal{E}_{loc\, z}\hat{z}\right)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{loc} = \vec{\mathcal{E}} + \left(\frac{\alpha}{3\varepsilon_0 a^2 c} + \frac{\lambda_i \alpha}{2\pi\varepsilon_0}\right)\vec{\mathcal{E}}_{loc} - \frac{3\lambda_i \alpha}{2\pi\varepsilon_0}\mathcal{E}_{loc\, z}$$

$$\therefore \mathcal{E}_{loc\, \underset{(y)}{x}} = \mathcal{E}_{\underset{(y)}{x}} + \left(\frac{\alpha}{3\varepsilon_0 a^2 c} + \frac{\lambda_i \alpha}{2\pi\varepsilon_0}\right)\mathcal{E}_{loc\, \underset{(y)}{x}}$$

$$\mathcal{E}_{loc\, z} = \mathcal{E}_z + \left(\frac{\alpha}{3\varepsilon_0 a^2 c} + \frac{\lambda_i \alpha}{2\pi\varepsilon_0} - \frac{3\lambda_i \alpha}{2\pi\varepsilon_0}\right)\mathcal{E}_{loc\, z}$$

$$\therefore \left(1 - \frac{\alpha}{3\varepsilon_0 a^2 c} - \frac{\lambda_i \alpha}{2\pi\varepsilon_0}\right)\mathcal{E}_{loc\, \underset{(y)}{x}} = \mathcal{E}_{\underset{(y)}{x}}$$

$$A\, \mathcal{E}_{loc\, \underset{(y)}{x}} = \mathcal{E}_{\underset{(y)}{x}} \Rightarrow \mathcal{E}_{loc\, \underset{(y)}{x}} = \frac{\mathcal{E}_{x(y)}}{A}$$

όπου $A \equiv 1 - \frac{\alpha}{3\varepsilon_0 a^2 c} - \frac{\lambda_i \alpha}{2\pi\varepsilon_0}$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{3\varepsilon_0 a^2 c} + \frac{\cancel{2}\lambda_i \alpha}{\cancel{2}\pi\varepsilon_0}\right)\mathcal{E}_{loc_z} = \mathcal{E}_z \Rightarrow B\,\mathcal{E}_{loc_z} = \mathcal{E}_z.$$

$$\mathcal{E}_{loc_z} = \frac{\mathcal{E}_z}{B} \quad , \text{όπου } B \equiv 1 - \frac{\alpha}{3\varepsilon_0 a^2 c} + \frac{\lambda_i \alpha}{\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{P} = \frac{\alpha}{a^2 c} \vec{\mathcal{E}}_{loc} \quad , \quad \vec{P} = \tilde{\chi} \varepsilon_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

$$P_{x\,(y)} = \frac{\alpha}{a^2 c} \mathcal{E}_{loc\, x\,(y)} = \frac{\alpha}{a^2 c A} E_{x\,(y)} = \chi_{xx\,(yy)} \varepsilon_0 E_{x\,(y)}$$

Άρα: $\boxed{\chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 a^2 c A}}$.

$$P_z = \frac{\alpha}{a^2 c} \mathcal{E}_{loc\, z} = \frac{\alpha}{a^2 c B} E_z = \chi_{zz} \varepsilon_0 E_z .$$

$$\therefore \boxed{\chi_{zz} = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 a^2 c B}}$$

$\alpha = 10^{-40} C^2 m/N$, $a = 5$ Å, $c = 9$ Å. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$

Στην περίπτωση αυτή $c > \sqrt{2} a$ ($= 7{,}05$ Å).

και άρα έχουμε

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(\sqrt{2} a)^3} - \frac{1}{c^3} \right) = 0{,}009457 \times 10^{30}$$

$$A = 1 - \frac{\alpha}{3 \varepsilon_0 a^2 c} - \frac{\lambda_2 \alpha}{2 \pi \varepsilon_0} = 1 - \frac{10^2}{3(8{,}85)(225)} - \frac{(0{,}009457)\, 10^2}{2(3{,}1415)(8{,}85)} =$$

$$= 1 - 1{,}6739 \times 10^{-2} - 1{,}7007 \times 10^{-2} = 0{,}966 .$$

$$B = 1 - \frac{\alpha}{3 \varepsilon_0 a^2 c} + \frac{\lambda_2 \alpha}{\pi \varepsilon_0} = 1 - \frac{10^2}{3(8{,}85)(225)} + \frac{(0{,}009457)\, 10^2}{2(3{,}1415)(8{,}85)}$$

$$= 1 - 1{,}6739 \times 10^{-2} + 3{,}4014 \times 10^{-2} = 1{,}017$$

$$\therefore \chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{10^{-40}}{(8{,}85 \times 10^{-12})(225)\, 10^{-30}\, 0{,}966} = \frac{10^2}{(8{,}85)(225)(0{,}966)} = 0{,}052$$

$$\chi_{zz} = \frac{10^2}{(8{,}85)(225)(1{,}017)} = 0{,}049 .$$