1. (25 μον.) Δύο σωματίδια με σπίν $s_1=3/2$ και $s_2=5/2$, τα οποία αλληλεπιδρούν σύμφωνα με την Χαμιλτονιανή , $H = \mathrm{A}\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$. Να υπολογίσετε το σύνολο των ενεργειακών τιμών του συστήματος και να βρείτε το βαθμό εκφυλισμού κάθε ενεργειακής στάθμης.

2. (25 μον.) **(α)** Εξηγείστε αναλυτικά πως με τη μέθοδο των μεταβολών μπορούμε να προσδιορίσουμε προσεγγιστικά την ενεργειακή στάθμη χαμηλότερης ενέργειας σε ένα ατομικό σύστημα (10 μον). **(β)** Εφαρμόστε τη μέθοδο αυτή για να βρείτε προσεγγιστικά την χαμηλότερη ενέργεια σε ένα κβαντικό αρμονικό ταλαντώτη, επιλέγοντας πρώτα δοκιμαστική κυματοσυνάρτηση την
$\psi(x,\lambda) = \mathrm{N}e^{-\lambda x^2/2}$.(20 μον.)

3. (25 μον.) **(α)** Κατά την αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (στατικό), η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί:

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

εφόσον το σωματίδιο δεν έχει σπιν. (α) Αν έχουμε υδρογονοειδές άτομο, η αλληλεπίδραση του ΗΜ πεδίου με τον πυρήνα μπορεί να αμεληθεί σε πρώτη προσέγγιση. Να γράψετε την μορφή που παίρνει η εξίσωση του Schr$\ddot{o}$dinger σε ένα δυναμικό Coulomb. Να δείξετε τότε ότι, αν $\nabla \cdot \vec{\mathrm{A}} = 0$, θα είναι:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{(4\pi\varepsilon_0)r} - \frac{i\hbar e}{m}\vec{A}\cdot\vec{\nabla} + \frac{e^2}{2m}\vec{A}^2 \right]\psi(r,t)$$

(β) Δεχόμενοι ότι αμελώντας τον όρο με συντελεστή $\vec{\mathrm{A}}^2$, προκύπτει τελικά η εξίσωση Schr$\ddot{o}$dinger:

$$[(\vec{p}^2/2\mu) - (q/2\mu c)\vec{B}\cdot\vec{L} + V(r)]\psi(r) = \mathrm{E}\psi(r)$$

τότε να γράψετε για ένα ομογενές πεδίο Β, παράλληλο προς τον άξονα των z την αζιμουθιακή εξάρτηση των ιδιοσυναρτήσεων . (γ) Να βρείτε την έκφραση των ενεργειακών σταθμών E_i μετά την εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου (αν πριν την εφαρμογή του έχουν ιδιοτιμή Ε).
(δ) Σχεδιάστε τα ενεργειακά επίπεδα που προκύπτουν από ένα ζεύγος σταθμών *l=3 και l=2* λόγω του φαινομένου Zeeman. Εξηγείστε γιατί, η αρχική φασματική γραμμή εμφανίζεται τριπλή (**15 μον).**

4. (25 μον.**)** **(α)** Περιγράψετε το φαινόμενο της *αντιστροφής* στο μόριο της αμμωνίας κάνοντας και μία γραφική αναπαράσταση του μορίου, του δυναμικού και ενεργειακών σταθμών. Περιγράψετε τον συμμετρικό και αντισυμμετρικό διαχωρισμό,

$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L + \psi_R)$, και $\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_L - \psi_R)$ και εξηγήσετε την προκύπτουσα ταλάντωση .
(β) Αν το ενεργειακό χάσμα μεταξύ των δύο ιδιοτιμών είναι 2Α (περίπου 10^{-4} eV) , δηλαδή $E_1=E_0-A$, και $E_2=E_0+A$, εκφράσετε τη χρονική εξέλιξη της συνολικής κυματοσυνάρτησης ψ(t), και βρείτε μία έκφραση για την πιθανότητα να βρούμε το

μόριο στην αριστερή πολική του κατάσταση (υπόδ.: Δείξετε πως είναι ίση με $\cos^2(\frac{At}{\hbar})$).

5. (25 μον.) Στο άτομο του υδραργύρου, απομονώνουμε με κατάλληλο οπτικό φίλτρο τη γραμμή 546 nm, και με συμβολόμετρο Fabry-Perot του οποίου το ένα κάτοπτρο μετακινείται, ώστε να μεταβάλλεται η απόσταση d, καταγράφουμε την ένταση που διαδίδεται στο σημείο Σ, συναρτήσει της φάσης δ. Τα άτομα βρίσκονται σε ένα μαγνητικό πεδίο 0.1 Tesla. Βρείτε (α) πόση είναι η *ελεύθερη φασματική περιοχή* του συμβολομέτρου αν η αρχική τους απόσταση των 2 κατόπτρων είναι 0.5 cm . (β) Αν η ανακλαστικότητα των κατόπτρων είναι R=0.95, να βρείτε τη διακριτική ικανότητα του για τη γραμμή λ_0 =546 nm . Λόγω του φαινομένου Zeeman, παρουσιάζονται ένα πλήθος γραμμών, κοντά στη λ_0, έστω 5. Ποσοτικοποιήστε, ενεργειακά, τις γραμμές αυτές , δικαιολογώντας τις εκτιμήσετε. Σχεδιάστε, ποιοτικά, την απόκριση του συμβολομέτρου Fabry-Perot, δηλαδή την ένταση συναρτήσει φάσης δ, για τις δύο πρώτες περιόδους. Απαριθμήσετε τυχόν παραδοχές για την παρουσίαση του διαγράμματος. Εξηγείστε αν το συμβολόμετρο έχει την ικανότητα προσδιορισμού της τιμής του μαγνητικού πεδίου που προκαλεί τον διαχωρισμό Zeeman.

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 5.8x10^{-9}\, eV/tesla = 0{,}93x10^{-23}\, J/tesla$ *1tesla=10^4gauss*

$e=1{,}6x10^{-19}C$, $m_e=9{,}1x10^{-28}g$, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137{,}036}$, *ακτιν. Bohr* $a_0 = \frac{\hbar^2}{mc^2}$

πυρην. Μαγνητόνη $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3{,}152x10^{-12}\, eV/gauss$, $h = 6{,}62x10^{-27}\, erg \cdot s$

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}))\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

$$d(\sin\theta_{\pi\rho} + \sin\theta_{\pi\varepsilon\rho}) = m\lambda$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S \bullet I = \frac{1}{2}(F^2 - S^2 - I^2)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I_T} = \frac{(\frac{1-A}{1-R})^2}{1+F\sin^2(\frac{\psi}{2})} \quad , \quad \boldsymbol{\psi = \varphi + \varepsilon} \text{ και } \boldsymbol{\varphi} = \frac{2\pi(2nd\cos\theta)}{\lambda_0} \quad , \quad \boldsymbol{f} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{res}} = \mathbf{f\, N} \quad , \quad \boldsymbol{\Delta\lambda_{FSR}} = \frac{\lambda^2}{2dn}$$

http://users.ntua.gr/fokitis/atmof.html