Κεφάλαιο 3

Θεωρία Floquet

3.1 Εισαγωγή-Βασική Θεωρία

Έστω το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με χρονοεξαρτώμενους συντελεστές

$$x'(t) = A(t)\,x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

όπου $A(t)$ είναι ένας $n \times n$ περιοδικός πίνακας με ελάχιστη περίοδο T, δηλαδή ισχύει:

$$A(t+T) = A(t), \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Αποδεικνύεται ότι οι λύσεις του συστήματος (1.1) δεν είναι πάντα περιοδικές. Για παράδειγμα, έστω η πρώτης τάξης γραμμική εξίσωση

$$x'(t) = (1 + \sin t)\,x(t), \tag{1.3}$$

όπου $A(t) = 1 + \sin t$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi$. Όλες οι λύσεις της (1.3) δίδονται στη μορφή:

$$x(t) = c\,e^{t - \cos t}, \quad c \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη λύση της εξίσωσης (1.3) είναι η τετριμμένη (για $c = 0$). Γενικότερα, για τα περιοδικά συστήματα ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεώρημα 3.1.1. (Θεώρημα Floquet) *Το σύστημα $x'(t) = A(t)\,x(t)$, όπου $A(t)$ είναι ένας $n \times n$ περιοδικός πίνακας με ελάχιστη περίοδο T, έχει τουλάχιστον μια μη τετριμμένη λύση $x = x(t)$ έτσι ώστε:*

$$x(t+T) = \mu\,x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

όπου μ είναι μια σταθερά.

Απόδειξη Έστω $\Phi(t) = (\phi_{i\,j\in\mathbb{N}})$ ο θεμελιώδης πίνακας του συστήματος. Τότε θα ισχύει $\Phi'(t) = A(t)\,\Phi(t)$. Επειδή δε $A(t+T) = A(t)$, ο πίνακας $\Phi(t+T)$ θα ικανοποιεί το ίδιο σύστημα, ενώ επιπλέον ισχύει ότι $det\,\Phi(t+T) \neq 0$, δηλαδή ο πίνακας $\Phi(t+T)$ θα είναι ένας άλλος θεμελιώδης πίνακας του συστήματος. Συνεπώς οι στήλες (λύσεις) του πίνακα $\Phi(t+T)$ θα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πίνακα $\Phi(t)$, δηλαδή θα ισχύει

$$\phi_{i\,j}(t+T) = \sum_{\kappa=1}^{n} \phi_{i\,\kappa}(t)\, e_{\kappa\, j},$$

για κάποιες σταθερές $e_{\kappa j}$ έτσι ώστε να έχουμε

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\, E, \tag{1.6}$$

όπου $E = (e_{\kappa j})$. Ο πίνακας E είναι μη ιδιάζων, αφού ικανοποιεί την εξίσωση $det\Phi(t+T) = det\Phi(t)\, det\, E$ δηλαδή θα ισχύει $detE \neq 0$. Έστω μ μια ιδιοτιμή του πίνακα E, δηλαδή μ λύση της εξίσωσης

$$det(E - \mu\, I) = 0 \tag{1.7}$$

και v ένα ιδιοδιάνυσμα, το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ, δηλαδή ισχύει η εξίσωση

$$(E - \mu\, I)\, v = 0. \tag{1.8}$$

Θεωρούμε τη λύση $x(t) = \Phi(t)\, v$. Τότε θα έχουμε

$$x(t+T) = \Phi(t+T)\, v = \Phi(t)\, E\, v = \Phi(t)\, \mu\, v = \mu\, x(t) \tag{1.9}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ♦

Ορισμός 3.1.2. *Οι ιδιοτιμές του πίνακα* E *ονομάζονται* **χαρακτηριστικοί αριθμοί** *ή* **χαρακτηριστικοί πολλαπλασιαστές (characteristic multipliers)** της εξίσωσης (1.1).

Η σπουδαιότητα του Θεωρήματος Floquet οφείλεται στο γεγονός ότι, μας δίνει τη δυνατότητα εύρεσης περιοδικών λύσεων για συγκεκριμένες τιμές των χαρακτηριστικών αριθμών.

Παράδειγμα 3.1.3. *Να βρεθούν οι χαρακτηριστικοί αριθμοί για το περιοδικό διαφορικό σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

όπου $a(t) = (\cos t + \sin t)/(2 + \sin t - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Λύση Από το σύστημα (1.10) προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$(2+\sin t-\cos t)x_2'(t)=(\sin t+\cos t)\,x_2(t),\ t\in\mathbb{R},$$

με γενική λύση τη συνάρτηση

$$x_2(t)=c_2\,(2+\sin t-\cos t),\ c_2\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}.$$

Έτσι η συνάρτηση $x_1(t)$ θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$x_1'(t)-x_1(t)=x_2(t)=c_2\,(2+\sin t-\cos t),\ c_2\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R},$$

Συνεπώς προκύπτει ότι

$$x_1(t)=c_1\,e^t-c_2\,(2+\sin t),\ t\in R,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Ένας θεμελιώδης πίνακας $\Phi(t)$ του συστήματος (1.10) προκύπτει αν θεωρήσουμε τα ακόλουθα ζεύγη τιμών για τις σταθερές, $c_1=0,\,c_2=1$ και $c_1=1,\,c_2=0$, δηλαδή θα έχουμε:

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} -2-\sin t & e^t \\ 2+\sin t-\cos t & 0 \end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}.$$

Ο πίνακας του συστήματος (1.10) έχει ελάχιστη περίοδο $T=2\pi$. Επομένως ο πίνακας E του Θεωρήματος Floquet θα ικανοποιεί τη σχέση $\Phi(t+2\pi)=\Phi(t)\,E$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Έτσι θα ισχύει επίσης $\Phi(2\pi)=\Phi(0)\,E$, δηλαδή έχουμε ότι

$$E=\Phi^{-1}(0)\,\Phi(2\pi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές μ του πίνακα E ικανοποιούν την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & 0 \\ 0 & e^{2\pi}-\mu \end{vmatrix}\ \text{ή}\ (1-\mu)(e^{2\pi}-\mu)=0.$$

Άρα ο πίνακας E δέχεται τις ιδιοτιμές $\mu_1=1$ και $\mu_2=e^{2\pi}$. Από το Θεώρημα Floquet προκύπτει ότι, επειδή έχουμε τη μονάδα ως ιδιοτιμή $(m_1=1)$, θα υπάρχει μια περιοδική λύση του προβλήματος (1.10) με περίοδο $t=2\pi$. Παρατηρώντας τα παραπάνω βήματα, διαπιστώνουμε ότι, πράγματι για $c_1=0$ έχουμε μια περιοδική (με περίοδο $T=2\pi$) λύση του προβλήματος (1.10), η οποία είναι η $x_1(t)=-c_2\,(2+\sin t)$, $x_2(t)=c_2(2+\sin t-\cos t)$. ◄

Θεώρημα 3.1.4. *Οι σταθερές μ του Θεωρήματος Floquet είναι ανεξάρτητες της επιλογής του θεμελιώδους πίνακα $\Phi(t)$.*