ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική ΙΙ

Τελική εξέταση Φεβρουαρίου, 16/02/2009.
Διδάσκων Κ. Φαράκος

<u>Θέμα Ι.</u> Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F=-kx$, $k>0$ και η κατάστασή του σε μια ορισμένη στιγμή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2/2}$$

(α) Έχει το σωματίδιο απόλυτα καθορισμένη ενέργεια; Υπάρχει κατάλληλη τιμή του λ για την οποία η απάντηση είναι καταφατική;
(β) Για οιοδήποτε λ υπολογίστε την μέση τιμή της ενέργειας του σωματιδίου και σχεδιάστε πρόχειρα την εξάρτησή της από το λ. Τι παρατηρείτε, ποία η σχέση με το ερώτημα (α);

<u>Θέμα ΙΙ.</u> Ηλεκτρόνιο, ακίνητο, ευρίσκεται σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την σχέση $\vec{B}(t) = B_0 \sin(\omega t)\ \hat{z}$. Για $t = 0$ το ηλεκτρόνιο ευρίσκεται στην ιδιοκατάσταση του τελεστή S_n με ιδιοτιμή $+\hbar/2$, όπου $S_n = \vec{S}\cdot\vec{n}$, $\vec{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. (α) Υπολογίστε σαν συνάρτηση του χρόνου την πιθανότητα μέτρησης της τιμής $-\hbar/2$ για το *spin* στη κατεύθυνση x. (β) Ποία είναι η πιθανότητα μέτρησης της τιμής $\hbar/2$ για το *spin* στην κατεύθυνη z;

<u>Θέμα ΙΙΙ.</u> Σωμάτιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού $V(r)$ όπου, $V(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ V_0 & a < r \end{cases}$.

Προσδιορίστε το V_0 έτσι ώστε το σύστημα να έχει για στροφορμή μηδέν μόνο τρεις δέσμιες καταστάσεις.

<u>Θέμα IV.</u> Το ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου την χρονική στιγμή $t=0$ είναι στην κατάσταση $\Psi(\vec{r}, t=0) = N\Psi_{211}\chi_+$

όπου $\chi_\pm$ είναι οι καταστάσεις σπίν και ψ_{nlm} οι ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του υδρογόνου με συγκεκριμένη ενέργεια. Το ηλεκτρόνιο βρίσκεται υπό την επήρεια ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B_0\hat{z}$ για $t>0$, $H=H_0+H_B$.
(α) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος για $t>0$. (β) Εάν μετρήσουμε το σπιν του ηλεκτρονίου στον άξονα z τι τιμές θα πάρουμε και με τι πιθανότητα;
(γ) Έστω $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ η ολική στροφορμή. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ολικής στροφορμής για αυτό το σύστημα?
(δ) Υπολογίστε τα $J_z\Psi$ και $J^2\Psi$. Σε ποια τιμή της ολικής στροφορμής αντιστοιχεί η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου;

Δίνονται: $s_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right), \qquad \vec{\mu}_s = -g\frac{e}{2m}\vec{S}$$

$$c_+(j,m) = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}, \quad c_-(j,m) = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}, \quad J_\pm = J_x \pm iJ_y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\exp(-\alpha x^2)dx = \frac{(2n)!}{n!(4\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$