

ΘΕΜΑΤΑ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΙΙ

Θέμα 1. α) Δείξτε ότι οι διακριτές ιδιοτιμές της ενέργειας σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα δεν είναι εκφυλισμένες.

β) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα να δείξετε ότι μπορούμε να διαλέξουμε τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις (δέσμιες καταστάσεις) να είναι πραγματικές.

Θέμα 2. α) Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα να δείξετε ότι ισχύει

$$\frac{d}{dt} \langle xp \rangle = 2 \langle T \rangle - \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

όπου $H = T + V$, και T η κινητική ενέργεια.

β) Δείξτε ότι εάν το σύστημα είναι σε μια δέσμια κατάσταση το αριστερό μέλος είναι μηδέν.

γ) Δείξτε ότι $\langle T \rangle = \langle V \rangle$ για τις δέσμιες καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

Θέμα 3. Σωματίδιο μάζας m κινείται μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πλάτους a ($0 < x < a$).

α) Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις Ψ_n και τις ιδιοτιμές της ενέργειας E_n του σωματιδίου.

β) Μία μικρή διαταραχή $V(x)$ προστίθεται στο σύστημα, $V(x) = -V_0$ για $0 < x < a/2$ και $V(x) = 0$ για $a/2 < x < a$, $V_0 > 0$. Να υπολογίσετε τις ενέργειες W_n του σωματιδίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

γ) Ομοίως όταν έχουμε $V(x) = -V_0$ για $0 < x < a/2$ και $V(x) = V_0$ για $a/2 < x < a$.

Θέμα 4. Σωματίδιο μάζας M κινείται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας R . Υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας, τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις και τον εκφυλισμό.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Θέμα 5. Η κυματοσυνάρτηση του ατόμου του Υδρογόνου (υποθέτοντας άπειρη την μάζα του πυρήνα) είναι

$$\psi(r, \theta, \phi) = c r e^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta$$

Όπου c μια σταθερά κανονικοποίησης και $\alpha = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$.

α) Υπολογίστε την z -συνιστώσα της στροφορμής L_z και τον κβαντικό αριθμό ℓ της στροφορμής.

β) Υπολογίστε την μέση τιμή της κινητικής ενέργειας του ατόμου.

γ) Υπολογίστε την ολική ενέργεια.

$$\int_0^\infty r^k e^{-\frac{r}{\alpha}} dr = k! \alpha^{k+1}$$

Θέμα 6. (α) Να δείξετε ότι $\langle \Psi_n | [H, A] | \Psi_n \rangle = 0$ για κάθε ιδιοσυνάρτηση Ψ_n της Χαμιλτονιανής H και ενός οποιουδήποτε τελεστή A του φυσικού συστήματος.

(β) Εάν $H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(r)$ και χρησιμοποιώντας τον τελεστή $A = \vec{r} \cdot \vec{P}$ αποδείξτε ότι για κάθε ιδιοσυνάρτηση της Χαμιλτονιανής ισχύει $2\langle T \rangle = -\langle V \rangle$, όπου T ο τελεστής της κινητικής ενέργειας και $V(r)$ η δυναμική ενέργεια για το άτομο του υδρογόνου.

Θέμα 7. Η δυναμική ενέργεια σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα για ένα σωματίδιο μάζας m , είναι ανάλογη της συνάρτησης δέλτα του Dirac,
 $V(x) = -\lambda \delta(x)$, $\lambda > 0$.

(α) Για ποιές τιμές της ενέργειας έχουμε σκέδαση (δηλαδή συνεχές φάσμα), για ποιες τιμές έχουμε δέσμιες καταστάσεις (διακριτό φάσμα);

(β) Να βρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις.

Θέμα 8. (α) Υπολογίστε τον μεταθέτη της κινητικής ενέργειας $\frac{\hat{p}^2}{2m}$ με τις

συνιστώσες \hat{L}_x , \hat{L}_y και \hat{L}_z της στροφορμής ($\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$).

(β) Να δείξετε ότι $[\hat{L}_x, \hat{H}] = 0$, $[\hat{L}_y, \hat{H}] = 0$ και $[\hat{L}_z, \hat{H}] = 0$ όταν το δυναμικό είναι

συνάρτηση του μέτρου $r = |\vec{r}|$ μόνο και $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r)$.

Θέμα 9. Σωματίο μάζας m κινείται σε πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < -a/2 \\ 0 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ V_0 & x > a/2 \end{cases}$$

Υπολογίστε το πλάτος a σαν συνάρτηση των m , V_0 και \hbar , ώστε να υπάρχει **μόνο μια δέσμια κατάσταση** με ενέργεια $E = V_0/2$, όπου $V_0 > 0$.

Θέμα 10. Σωματίο μάζας m κινείται σε «απειρόβαθο» πηγάδι, $0 \leq x \leq a$, και έχει αρχική κυματοσυνάρτηση που δίνεται από την σχέση $\Psi(x, t=0) = A \sin^3(\pi x/a)$

(α) Προσδιορίστε την σταθερά A και την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x, t)$ σαν συνάρτηση του χρόνου t .

(β) Υπολογίστε την αβεβαιότητα της ενέργειας ΔE ως συνάρτηση του χρόνου.

Υπόδειξη: $\sin^3(\theta) = \frac{1}{4}(3\sin(\theta) - \sin(3\theta))$

Θέμα 11. Δίνεται η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση

$$\Psi(\theta, \phi) = N(Y_1^{-1} + Y_1^0 + 2Y_1^{+1})$$

όπου $Y_l^m \equiv Y_l^m(\theta, \phi)$ είναι η σφαιρική αρμονική.

(α) Να υπολογίσετε την σταθερά N .

(β) Να υπολογίσετε την αβεβαιότητα στα μεγέθη L_z και L^2 .

Θέμα 12. Δίνεται η χαμιλτονιανή ενός συστήματος σπιν με δύο ίδιο-καταστάσεις,

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \text{όπου } E_1 \neq E_2 \in \mathbb{R}.$$

(α) Την χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα μετρήθηκε και το σπιν του βρέθηκε να είναι στην διεύθυνση $-\gamma$. Γράψτε την κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί.

(β) Γράψτε την κυματοσυνάρτηση του συστήματος για $t \neq 0$.

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα για κάθε ενδεχόμενο αποτέλεσμα της μέτρησης του σπιν στην διεύθυνση x ως συνάρτηση του χρόνου και να κάνετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

Θέμα 13. α) Αποδείξτε την σχέση που δίνει την χρονική μεταβολή της μέσης τιμής

$$\text{ενός τελεστή } A: \quad \frac{d \langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

β) Εάν H είναι η Χαμιλτονιανή ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή μάζας m

και συχνότητας ω , υπολογίστε τις ποσότητες $\frac{d \langle x \rangle}{dt}$, $\frac{d \langle p \rangle}{dt}$ και δείξτε ότι

$$\frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} = -\omega^2 \langle x \rangle$$

Θέμα 14. Ένα σωματίδιο μάζας m και ενέργειας $E=V_0$ προσπίπτει από αριστερά σε ένα ορθογώνιο φράγμα δυναμικού ύψους V_0 και πλάτους a . Βρείτε τον συντελεστή διέλευσης T .

Θέμα 15. Η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος δύο καταστάσεων είναι ένας ερμιτιανός

πίνακας $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a \end{pmatrix}$ με $a \in \mathbb{R}$. Εάν το σύστημα είναι αρχικά στην κατάσταση

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{βρείτε την κατάσταση του συστήματος για } t \neq 0.$$

Θέμα 16. α) Γράψτε τις σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές της στροφορμής.

β) Αν $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ να δείξετε ότι $[L^2, L_k] = 0$ όπου $k=x,y,z$.

γ) Σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H = \frac{L^2}{2I} + gL_z$, I και g θετικές

σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Να βρείτε το ενεργειακό του φάσμα. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των I και g έτσι ώστε η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας να είναι διπλά εκφυλισμένη.

Θέμα 17. Η συνάρτηση $\psi(\vec{r}) = cre^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta$ είναι η κυματοσυνάρτηση μιας στάσιμης κατάστασης ενός φυσικού συστήματος μάζας m το οποίο έχει δυναμική ενέργεια

$V(r) = \frac{\gamma}{r}$ και ορισμένη στροφορμή ℓ , όπου γ και a σταθερές. Να υπολογίσετε:

α) Την στροφορμή ℓ του συστήματος.

β) Την ενέργεια E του συστήματος.

γ) Την σταθερά γ .

Θέμα 18. Οι τελεστές a και a^\dagger ορίζονται ως εξής:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

για έναν αρμονικό ταλαντωτή μάζας m και συχνότητας ω . Υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες $a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}$, $a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$ των τελεστών a και a^\dagger , όπου Ψ_n είναι ιδιοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή.

(α) Βρείτε την δράση των τελεστών x και p_x στην Ψ_n .

(β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή του τελεστή $(xp_x + p_x x)$ ως προς την κυματοσυνάρτηση Ψ_n ενός αρμονικού ταλαντωτή.

Θέμα 19. Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά τον άξονα x με ιδιοσυνάρτηση βασικής κατάστασης $\Psi(x) = \frac{A}{\cosh(\lambda x)}$ όπου A, λ θετικές σταθερές.

Αν η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $V(x)$ μηδενίζεται για $|x| \rightarrow \infty$: (α) Βρείτε την τιμή της ενέργειας της βασικής στάθμης και (β) βρείτε την μορφή της δυναμικής ενέργειας. Δίνεται ότι:

$$(\cosh \lambda x)' = \lambda \sinh \lambda x, \quad (\sinh \lambda x)' = \lambda \cosh \lambda x, \quad \cosh^2 \lambda x - \sinh^2 \lambda x = 1$$

Θέμα 20. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται την χρονική στιγμή $t=0$ από την κυματοσυνάρτηση: $\Psi = N(\psi_{100} - \psi_{211} + \psi_{32,-1})$, όπου ψ_{100} , ψ_{211} και $\psi_{32,-1}$ κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις του ατόμου του υδρογόνου. (α) Υπολογίστε τον συντελεστή κανονικοποίησης N και την χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. (β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $\langle l^2 \rangle$, $\langle l_z \rangle$ και $\langle E \rangle$, καθώς και την αβεβαιότητα Δl^2 .

Θέμα 21. Η αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου με ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο

περιγράφεται από την χαμιλτονιανή
$$H = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(α) Υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του ηλεκτρονίου. (β) Την χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα μετρήθηκε και το σπιν του βρέθηκε στην κατεύθυνση $-z$. Γράψτε την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. (γ) Βρείτε την κατάσταση του συστήματος για $t>0$ και υπολογίστε την πιθανότητα να μετρήσουμε το σπιν στην κατεύθυνση z .

Θέμα 22. Κβαντομηχανικό σύστημα περιγράφεται από την χαμιλτονιανή

$$H = H_0 + V.$$

Υποθέτουμε ότι λύνουμε για την χαμιλτονιανή H_0 και ξέρουμε τις ιδιοσυναρτήσεις της $\Psi^{(0)}_n$ και τις ιδιοενέργειες $E^{(0)}_n$, $H_0 \Psi^{(0)}_n = E^{(0)}_n \Psi^{(0)}_n$.

Εάν θεωρήσουμε τον όρο V σαν διαταραχή βρείτε την διόρθωση στην ενέργεια σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών. Προσοχή, κάντε όλους τους απαιτούμενους ενδιάμεσους υπολογισμούς. Υποθέστε ότι δεν έχουμε εκφυλισμό.

Θέμα 23. Θεωρήστε δύο ορθοκανονικά διανύσματα ψ_1 και ψ_2 και υποθέστε ότι αποτελούν βάση σε ένα χώρο δύο διαστάσεων. Θεωρήστε επίσης ένα τελεστή A που ορίζεται στο χώρο αυτό και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$A\psi_1 = 2\psi_1 + \psi_2, \quad A\psi_2 = \psi_1 + 2\psi_2$$

Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή A .