ΣΕΜΦΕ, Κβαντομηχανική ΙΙ

Τελική εξέταση Φεβρουαρίου, 1/02/2010.

Διδάσκων Κ. Φαράκος

<u>**Θέμα Ι.**</u> Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου μάζας m στο επίπεδο (x, y) δίνεται από την σχέση $H = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + bxy$

Όπου b είναι μία σταθερά με κατάλληλες μονάδες.

(α) Να υπολογιστούν οι ενέργειες και οι κυματοσυναρτήσεις του σωματιδίου για $b=0$. Οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις του μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή θεωρούνται γνωστές.

(β) Εάν $b \neq 0$ και $b << m\omega^2$, να υπολογιστούν σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών οι ενέργειες της χαμηλότερης εκφυλισμένης στάθμης του πρώτου ερωτήματος και οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις.

<u>**Θέμα ΙΙ.**</u> Ηλεκτρόνιο, ακίνητο, ευρίσκεται σε εναλλασσόμενο μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την σχέση $\vec{B}(t) = B_0 \sin(\omega_0 t)\ \hat{z}$. Για $t = 0$ το ηλεκτρόνιο ευρίσκεται στην ιδιοκατάσταση του τελεστή S_x με ιδιοτιμή $+\hbar/2$. (α) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου την τυχαία χρονική στιγμή t. (β) Υπολογίστε σαν συνάρτηση του χρόνου την μέση τιμή για το *spin* στη κατεύθυνση x, y και z. Τι παρατηρείται για το διάνυσμα της μέσης τιμής του spin; $<\vec{S}> = \hat{i} <S_x> + \hat{j} <S_y> + \hat{k} <S_z>$.

<u>**Θέμα ΙΙΙ.**</u> Σωμάτιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση κεντρικού δυναμικού $V(r)$ όπου, $V(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < a \\ V_0 & a < r \end{cases}$.

(α) Γράψτε την Χαμιλτονιανή του σωματιδίου σε σφαιρικές συντεταγμένες και ξεχωρίστε τον όρο της στροφορμής.

(β) Προσδιορίστε το V_0 έτσι ώστε το σύστημα να έχει για στροφορμή μηδέν μόνο τρεις δέσμιες καταστάσεις.

<u>**Θέμα IV.**</u> (α) Αποδείξτε τις σχέσεις μετάθεσης για τους τελεστές της στροφορμής.

(β) Αν $\mathbf{L}^2 = L_x{}^2 + L_y{}^2 + L_z{}^2$ να δείξετε ότι $[\mathbf{L}^2, L_k] = 0$ όπου $k = x, y, z$.

(γ) Σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H = \frac{L_x{}^2 + L_y{}^2}{2I} + gL_z$, I και g θετικές σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Να βρείτε το ενεργειακό του φάσμα. Εάν $g = \hbar/2I$ βρείτε τον εκφυλισμό της θεμελιώδους κατάστασης.

Δίνονται: $s_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right), \qquad \vec{\mu}_s = -g\frac{e}{2m}\vec{S}$$

$$x\psi_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\psi_{n-1} + \sqrt{n+1}\psi_{n+1}\right)$$