Νάμαστε πάλι.....Ερώτηση κρίσεως... Θέμα 4ο κανονική μαθηματικού εφαρμογών 2010, έχουμε το

$$y'' - 2y' + \lambda y = 0, \qquad x \in [0, L], \qquad y(0) = y(L) = 0$$

Μή τετριμμένες λύσεις βρίσκουμε μόνο για $\lambda > 1$ και τα ζεύγη ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων που προκύπτουν είναι :

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} + 1, \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) n = 1, 2, \ldots$$

όπου έχω πάρει κατευθείαν τις κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις, που προκύπτουν αφού φέρουμε το πρόβλημα σε μορφή Strum:

$$\left(e^{-2x}y'\right)' + \lambda e^{-2x} y = 0$$

και από την οποία προκύπτει η σχέση ορθοκανονικότητας :

$$< y_n, y_m >= \int_0^L w(x) y_n y_m dx = \delta_{n,m}, \quad w(x) = e^{-2x}, \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Τώρα θέλουμε να επιλύσουμε το ημιομογενές

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \qquad x \in [0, L], \qquad y(0) = y(L) = 0$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με το

$$\left(e^{-2x}y'\right)' + 2e^{-2x} y = e^{-x} \quad x \in [0, L], \quad y(0) = y(L) = 0$$

Σύμφωνα λοιπόν με την θεωρία τα ιδιοδιανύσματα του ομογενούς αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του χώρου των συνεχών συναρτήσεων στο [0,Λ] και έτσι η λύση του ημιομογενούς (άν υπάρχει) η οποία θα είναι αναγκαστικά συνεχής αφού είναι διαφορίσιμη, θα μπορεί να γραφτεί ώς :

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} < \phi, y_n > y_n$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω του ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι κανονικοποιημένα, και η ισότητα της λύσης με την σειρά είναι κατά νορμ, ενώ αν η λύση έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης η σύγκλιση είναι και ομοιόμορφη. Τώρα ορίζουμε τον γραμμικό διαφορικό τελεστη

$$L[y] = \left(e^{-2x}y'\right)'$$

ο οποίος ικανοποιεί τις:

$$L[y_n] = -\lambda_n e^{-2x} y_n, \qquad L[\phi] = e^{-x} - 2e^{-2x}\phi$$

Αφού οι y_n και ϕ είναι λύσεις του ομογενούς και του ημιομογενούς αντίστοιχα. Επίσης σύμφωνα με την ταυτότητα Lagrange αφού οι συναρτήσεις y_n και ϕ ικανοποιούν τις ίδιες συνοριακές συνθύκες ισχύει ότι:

$$\int_0^L L[\phi] y_n dx = \int_0^L \phi L[y_n] dx$$

Έτσι έχουμε τα επόμενα :

$$\begin{aligned}\int_0^L L[\phi] y_n dx &= \int_0^L \phi L[y_n] dx \\ &= -\lambda_n \int_0^L e^{-2x} \phi y_n dx \\ &= -\lambda_n < \phi, y_n > \\ &= -\lambda_n a_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^L L[\phi] y_n dx &= \int_0^L (e^{-x} - 2e^{-2x}\phi) y_n dx \\ &= \int_0^L e^{-x} y_n dx - 2\int_0^L e^{-2x} \phi y_n dx \\ &= \int_0^L e^{-x} y_n dx - 2a_n\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε

$$-\lambda_n a_n = \int_0^L e^{-x} y_n dx - 2a_n$$

και αφού $\lambda_n \neq 2 \forall n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2-\lambda_n} \int_0^L e^{-x} y_n dx \\ &= \frac{1}{2-\lambda_n} \int_0^L e^{-x} \sqrt{\frac{2}{L}} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ &= \frac{1}{1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx\end{aligned}$$

Από το οποίο καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα

$$a_n = \frac{1}{1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right)$$

Έτσι η λύση του ημιομογενούς θα είναι η

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right) \sqrt{\frac{2}{L}} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Απλοποιώντας όσο γίνεται

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^2 \left(1 - (-1)^n\right)}{n\pi \left(L^2 - n^2\pi^2\right)} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Στην συνέχεια και για να φτάσουμε στο ζουμί του θέματος μας ζητείται να εκφράσουμε την συνάρτηση e^x ώς στην ορθοκανονική της ανάπτυξη ώς πρός τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος. Έχουμε

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} < e^x, y_n > y_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L e^{-2x} e^x \sqrt{\frac{2}{L}} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right) \sqrt{\frac{2}{L}} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right) e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi} e^x \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)
\end{aligned}$$

Παραδίδουμε την κόλλα μας και είμαστε ευχαριστιμένοι... ή μήπως όχι; Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση e^x είναι λύση του ημιομογενούς... η οποία θα πρέπει να είναι και μοναδική αρα οι συντελεστές στα δύο αναπτύγματα θα έπρεπε να είναι ίσοι αφού για δεδομένη ορθοκανονική βάση του χώρου έχουμε μοναδική αναπαράσταση, αυτό όμως δεν ισχύει....... Τί μλκσ που είμαι!!!! Τώρα μόλι συνειδητοίησα ότι το μή ομογενές γενικά έχει λύση μοναδική ανν το ομογενές έχει μόνο την τετριμμένη!!! grrrrrr τσάμπα το ποστ

Π.Σ Αλήθεια πόσες ασκήσεις πρέπει να έχει λύσει κάποιος από κάθε τύπο προβλήματος ώστε να καταφέρει να γράψει 6 τέτοια θέματα μέσα σε τρείς ώρες;

Και επανέρχομαι.... Τελικά είχα δίκιο ότι κάπου έχω άδικο....το αντίστοιχο ομογενές του ημιομογενούς είναι το

$$y'' - 2y' - 2y = 0$$

Το οποίο αφού το 2 δεν αποτελεί ιδιοτιμή έχει μόνο την τετριμμένη λύση...άρα η λύση του ημιομογενούς είναι μοναδική και άρα θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\frac{2L^2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi(L^2 - n^2\pi^2)} = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$$

Σίγουρα κάπου σφάλω.... υπάρχει κανείς γεναίος να βρεί αν και πού έχω υπολογιστικό ή λογικό σφάλμα στον συλογισμό μου; Θα το εκτιμούσα πολύ γιατί έχω σπαστεί πολύ με το θέμα αλλά δεν έχω άλλο κουράγιο για το συγκεκριμένο πρόβλημα...