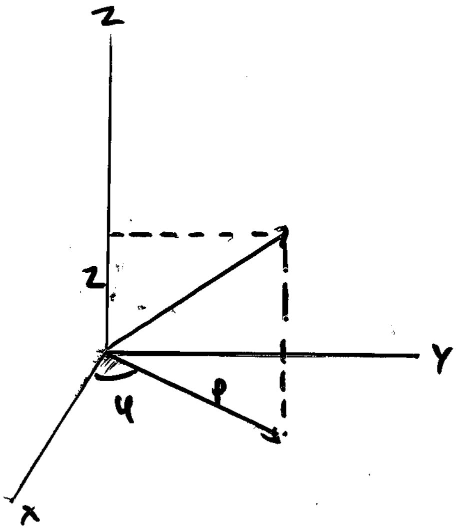
Κυλινδρικές συντεταγμένες.



Κυλινδρικές συντετ. ρ, φ, z

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$
$$z = z$$

Εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

κυλινδρικές:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

Χωρισμός μεταβλητών: $\Phi(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\,Q(\varphi)\,Z(z)$

όπου R, Q, Z ικανοποιούν:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

$$\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \nu^2 Q = 0$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

Λύσεις:

$$Z = e^{\pm kz}$$
$$Q = e^{\pm i\nu\varphi}$$

$\nu \in \mathbb{Z}$ (μονότιμη Q)

k μπορεί να είναι μιγαδικός ή πραγματικός ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες.

1) k πραγματικός

Ακτινική εξίσωση: (ορί), με $x=k\rho$)

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0$$

εξίσωση Bessel

Λύση είναι οι συναρτήσεις Bessel $\underline{J_\nu(x)}$, $\underline{Y_\nu(x)}$

Συμπεριφορά:

$x\ll 1$:

$$J_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

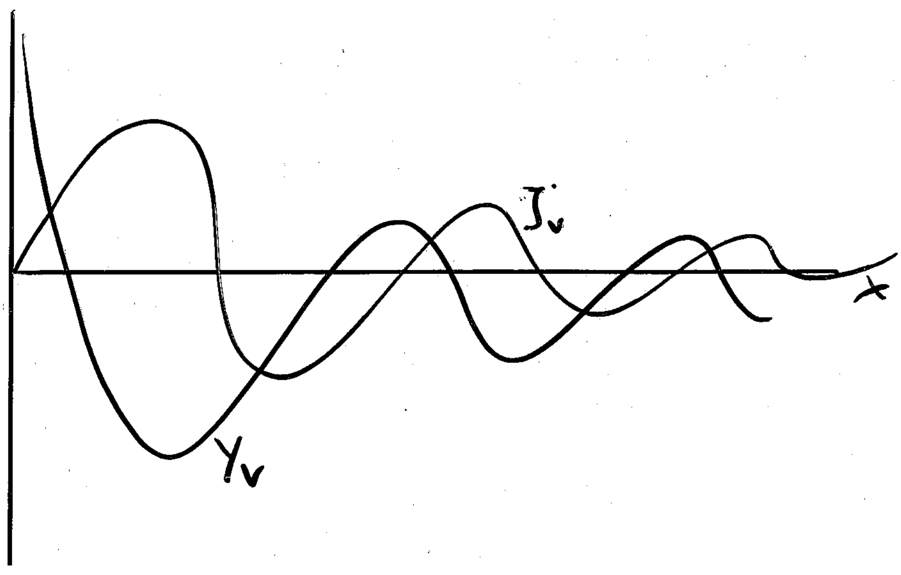
$$Y_\nu \sim \frac{2}{\pi}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\dots\right) \qquad \nu=0$$

$$-\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \qquad \nu\neq 0$$

$x\gg 1$:

$$J_\nu \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$Y_\nu \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$



2) K μιγαδικός ($k = i\kappa$)

Ακτινική εξίσωση ($x = \kappa\rho$)

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0$$

Λύσεις οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$

Συμπεριφορά:

$x \ll 1$:

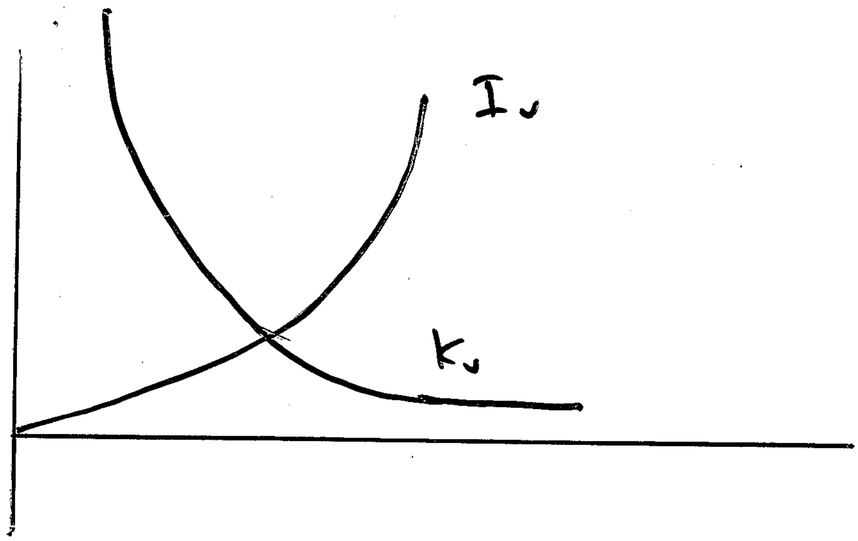
$$I_\nu \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$K_\nu \sim \begin{cases} -\ln\left(\frac{x}{2}\right) & \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases}$$

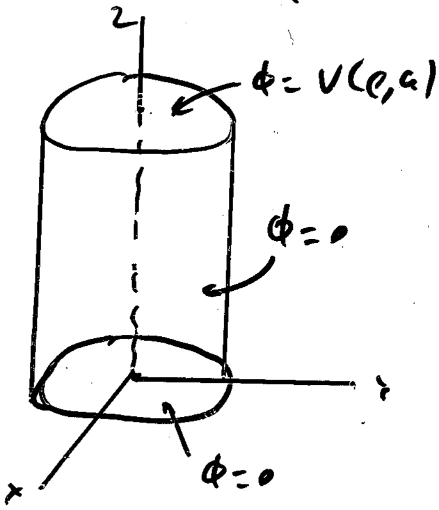
$x \gg 1$:

$$I_\nu \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{x}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$K_\nu \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$



4) Κύλινδρος ακτίνας a και ύψος L έχει τη μία βάση του σε δυναμικό $\Phi = V(\rho, \varphi)$ ενώ όλες οι άλλες επιφάνειες του έχουν δυναμικό 0. Να βρεθεί το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου.



$$Q(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi$$

$$Z(z) = C\cosh kz + D\sinh kz$$

Συνορ. συνθήκη $Z(0) = 0 \Rightarrow D = 0$

$$Z(z) = D\sinh kz$$

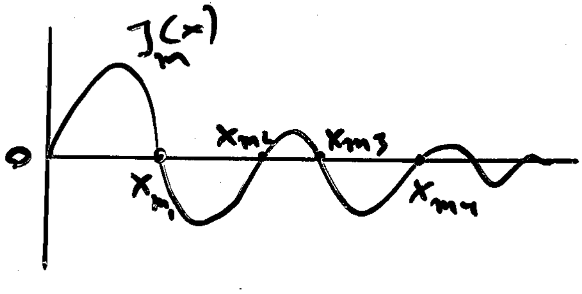
Ακτινική: $R(\rho) = \Lambda J_m(k\rho) + M Y_m(k\rho)$

Δυναμικό πεπερασμένο στο $\rho = 0 \Rightarrow M = 0$

$$R(\rho) = \Lambda J_m(k\rho)$$

Επίσης $R(a) = 0 \Rightarrow J_m(ka) = 0$

άρα ka ρίζες της $J_m(ka) = 0 \Rightarrow k = k_{mn} = \dfrac{x_{mn}}{a}$



$n = 1, 2, \ldots$

x_{mn} ρίζες της $J_m(x) = 0$

Άρα: γενική λύση:

$$\Phi(\rho,\varphi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) \left(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi\right)$$

Τελευταία συνοριακή συνθήκη:

$$V(\rho,\varphi) = \sum_{m,n} \sinh(k_{mn}L)\, J_m(k_{mn}\rho) \left(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi\right)$$

ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE

$\nabla^2 \phi = 0$ (ϕ δυναμικό, απουσία φορτίων)

Λύση με χωρισμό μεταβλητών.

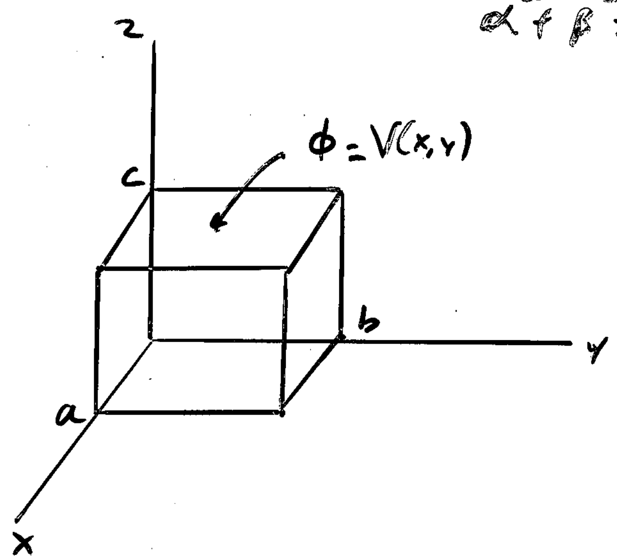
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$\phi = \phi(x,y,z)$ $$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0} \quad (1)$$

Λύση της μορφής: $\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$(1) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}}_{-\alpha^2} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{-\beta^2} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{\gamma^2} = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$



Συνοριακές συνθήκες:

$\phi = 0$	$x = 0$
$\phi = 0$	$x = a$
$\phi = 0$	$y = 0$
$\phi = 0$	$y = b$
$\phi = 0$	$z = 0$
$\phi = V(x,y)$	$z = c$

$$\frac{1}{X^2}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2 \Rightarrow X(x) = A_x \cos\alpha x + B_x \sin\alpha x$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2 \Rightarrow Y(y) = A_y \cos\beta y + B_y \sin\beta y$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 \Rightarrow Z(z) = A_z \cosh\gamma z + B_z \sinh\gamma z$$

$$\gamma = \sqrt{a^2+\beta^2}$$

Από συνοριακές συνθήκες:

$$X(0)=0 \Rightarrow A_x = 0 \qquad X(a)=0 \Rightarrow \sin\alpha a = 0$$

$$Y(0)=0 \Rightarrow A_y = 0 \qquad Y(b)=0 \Rightarrow \sin\beta b = 0 \Bigg\} \Rightarrow$$

$$Z(0)=0 \Rightarrow A_z = 0 \qquad \boxed{\alpha = \frac{n\pi}{a}}, \ \boxed{\beta = \frac{m\pi}{b}}$$

$$\phi(x,y,z) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \sinh\gamma_{nm} z$$

άγνωστοι

$$\gamma_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$

Τελευταία συνοριακή συνθήκη:

$$\phi(x,y,c) = V(x,y) \Rightarrow$$

$$V(x,y) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y \sinh\gamma_{nm} c$$

Θυμηθείτε:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)dx = \frac{a}{2}\delta_{nm}$$

Ομοίως: $$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy = \frac{b}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^a\int_0^b V(x,y)\sin\frac{\ell\pi}{a}x\,\sin\frac{k\pi}{b}y\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{n,m} A_{nm}\sinh(\gamma_{nm}c)\cdot\int_0^a \sin\left(\frac{\ell\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

$$\int_0^b \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy =$$

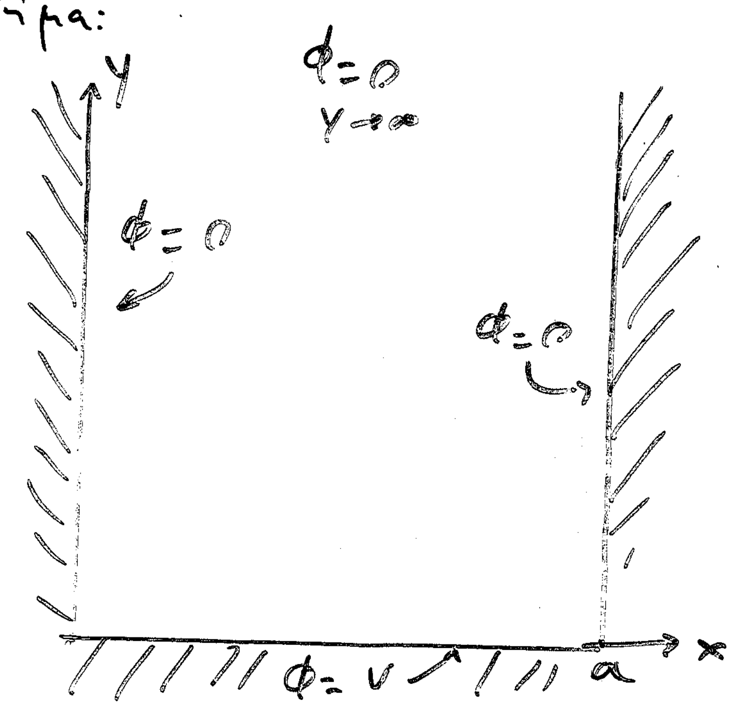
$$= \sum_{n,m} A_{nm}\sinh(\gamma_{nm}c)\,\frac{ab}{4}\,\delta_{n\ell}\,\delta_{km} =$$

$$= A_{\ell k}\,\frac{ab}{4}\,\sinh(\gamma_{\ell k}c) \Longrightarrow$$

$$\boxed{A_{\ell k} = \frac{4}{ab\sinh(\gamma_{\ell k}c)}\int_0^a\int_0^b V(x,y)\sin\frac{\ell\pi}{a}x\,\sin\frac{k\pi}{b}y\,dx\,dy}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Να βρεθεί το δυναμικό σε αγωγό με τη μορφή και τις συνοριακές συνθήκες όπως στο σχήμα:



Λύση: $\phi = \phi(x,y)$ (ανεξάρτητη του z)

$$\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} = 0 \quad (1)$$

Μεθ. χωρ. μεταβλητών. $\phi(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$(1)\cdot\frac{1}{X\cdot Y} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{-k^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}}_{k^2} = 0$$

$X(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad X(0) = X(a) = 0 \Rightarrow$

$A = 0 \qquad k = \frac{n\pi}{a} \qquad \boxed{X(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$

$$Y(y) = A' e^{ky} + B' e^{-ky}$$

$$Y(\infty) = 0 \Rightarrow \quad A' = 0 \qquad Y(y) = B' e^{-ky}$$

Λύση:

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Τελική συνορ. συνθήκη:

$$\phi(x,0) = V \Rightarrow$$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) V\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} A_n \delta_{nm} = \frac{a}{2} A_m \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) V\,dx = \begin{cases} \frac{4V}{n\pi} & n = \text{περ.} \\ 0 & n = \text{άρτιος} \end{cases}$$

$$\phi(x,y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=\text{περ}} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

ή

$$\phi(x,y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=\text{περ}} \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{n} e^{i\frac{n\pi x}{a}} \right) =$$

$$= \frac{4V}{\pi} \mathrm{Im}\left[\sum_{n=\text{περ}} \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi n}{a}(x+iy)} \right] =$$

$$= \frac{4V}{\pi} \mathrm{Im} \sum_{n=\text{περ}} \frac{Z^n}{n} \qquad Z = e^{\frac{i\pi}{a}(x+iy)}$$

Θ-φ-Deira:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \dots$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \dots\right.$$

$$= 2\left(\sum_{n=\text{περ}} \frac{x^n}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=\text{περ}} \frac{z^n}{n} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

$$\phi(x,y) = \frac{2V}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]$$

$$\mathrm{Im}\,\ln(z) = \mathrm{Arg}\,z$$

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-z^*)}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2+2i\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$$

$$\mathrm{Im}\,\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathrm{Arg}\,\frac{1+z}{1-z} = \tan^{-1}\left(\frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{1-|z|^2}\right)$$

$$z = e^{-\frac{\pi y}{a}}e^{i\frac{\pi x}{a}}$$

$$\frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{1-|z|^2} = \frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}}$$

$$\boxed{\phi(x,y) = \frac{2V}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}}\right)}$$