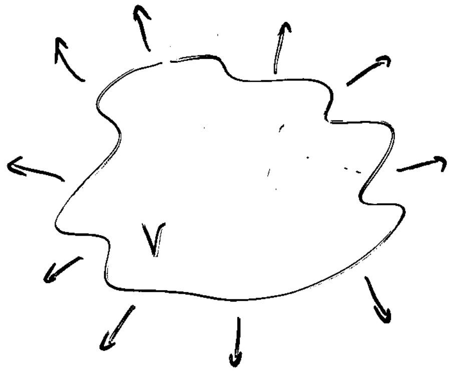
Μαγνητοστατική

Εξίσωση συνέχειας:



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0$$

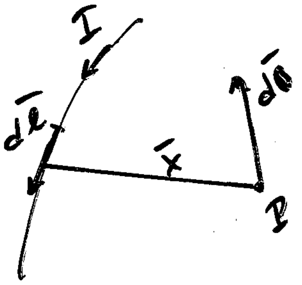
μαγνητοστατική $\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad$ έτσι: $\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = 0}$ στη μαγνητοστατική

Για μία πυκνότητα φορτίου $\bar{J}(x)$, το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο είναι:

$$\boxed{\bar{B}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \bar{J}(x') \times \frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}\, d^3x}$$

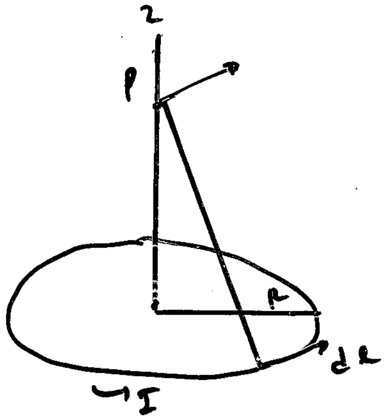
νόμος Biot-Savart.

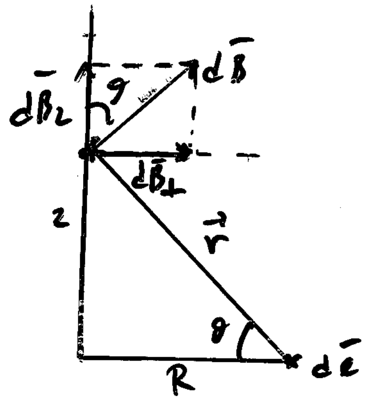
Για γραμμή διαρρεόμενη από ρεύμα I, ο νόμος Biot-Savart παίρνει τη μορφή:



$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\,\frac{d\bar{l}\times\bar{x}}{|x|^3}$$

• Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στον άξονα συμμετρίας βρόγχου που διαρρέεται από ρεύμα I.





$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\bar{l} \times \bar{r}}{r^3} = d\bar{B}_z + d\bar{B}_\perp$$

$dB_\perp = 0$ (λόγω συμμετρίας)

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos\theta \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi R \cos\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\bar{\nabla}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right) = -\frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|x-x'|^3}$$

μπορούμε να γράψουμε:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\bar{\nabla}\times\int \frac{\bar{J}(x')}{|x-x'|}\,d^3x'$$

από όπου προκύπτει:

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0}$$ 2η εξίσωση Maxwell.

Έχουμε επίσης:

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\int \frac{\bar{J}(x')}{|x-x'|}\,d^3x' =$$

$\nabla\times\nabla\times A = \nabla\cdot(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\bar{\nabla}\cdot\int \bar{J}(x')\,\bar{\nabla}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)d^3x'$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\int \bar{J}(x')\,\nabla^2\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)d^3x' =$$

$\bar{\nabla}\left(\frac{1}{|x-x'|}\right) = -\bar{\nabla}'\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\bar{\nabla}\int \bar{J}(x')\,\bar{\nabla}'\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)d^3x'$$

$\nabla^2\left(\frac{1}{|x-x'|}\right) = -4\pi\,\delta^{(3)}(x-x')$

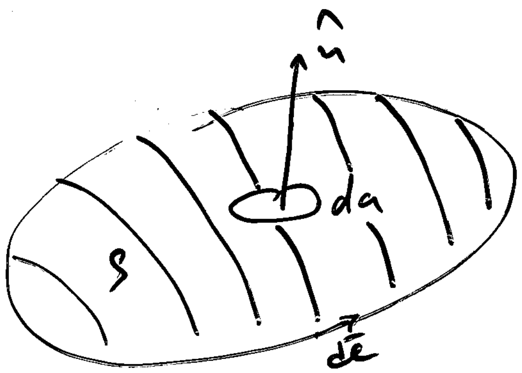
$$+\mu_0\bar{J}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\bar{\nabla}\cdot\int \frac{\bar{\nabla}'\bar{J}(x')}{|x-x'|}\,d^3x' =$$

$\bar{\nabla}'\cdot\bar{J}(x') = 0$ (μαγνητοστατική)

$$+\mu_0\bar{J} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{B} = \mu_0\bar{J}}$$ νόμος Ampère (διαφορική μορφή)



$$\int_S (\bar{\nabla}\times\bar{B})\cdot\hat{n}\, da = \mu_0 \int_S \bar{J}\cdot\hat{n}\, da$$

Θεώρημα Stokes

$$\int_S (\bar{\nabla}\times\bar{B})\cdot\hat{n}\, d^2x = \oint_C \vec{B}\cdot d\bar{\ell}$$

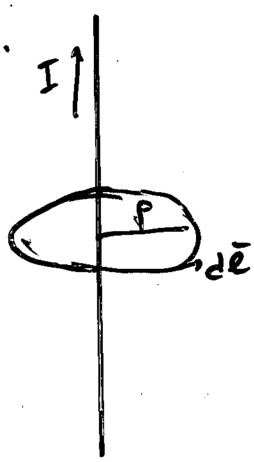
άρα:

$$\boxed{\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = \mu_0 I_{\pi\epsilon\rho}}$$ νόμος Ampère

$$I_{\pi\epsilon\rho} = \int_S \bar{J}\cdot\hat{n}\, da$$

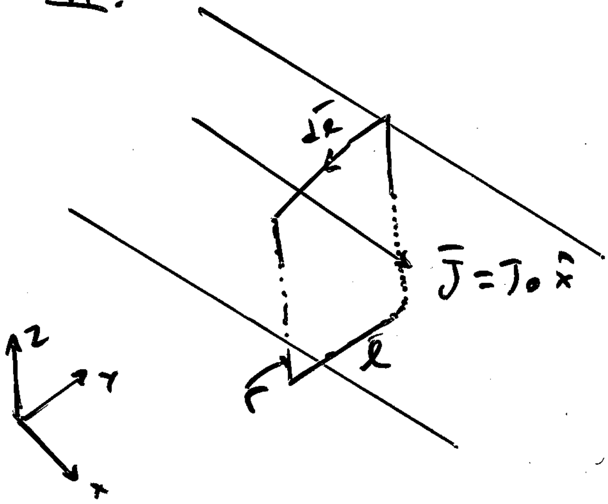
π.χ.

I.

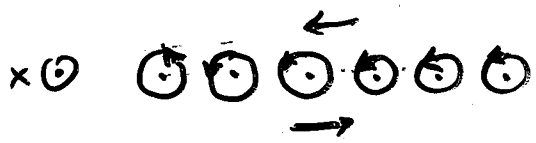


$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = 2\pi\rho = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{\bar{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho}\hat{e}_\varphi}$$

II.



Άπειρο λεπτό φύλλο στο επίπεδο x-y διαρρέεται με ρεύμα πυκνότητας $\bar{J} = J_0\hat{x}$. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο.



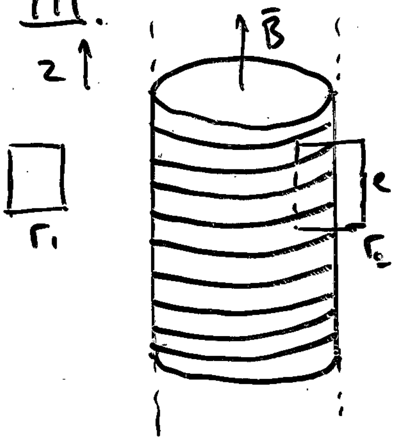
$$\oint_\Gamma \bar{B}\, d\bar{\ell} = 2B\cdot\ell = \mu_0 I_{\pi\epsilon\rho}$$

$$I_{\pi\epsilon\rho} = J_0 \ell \Rightarrow$$

$$|\bar{B}| = \frac{\mu_0}{2} J_0 \Rightarrow$$

$$\bar{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 J_0}{2}\hat{y} & z>0 \\ \dfrac{\mu_0 J_0}{2}\hat{y} & z<0 \end{cases}$$

III.



Σε άπειρο σωληνοειδές με n σπείρες ανά μονάδα μήκους, κάθε σπείρα διαρρέεται από ρεύμα I_0. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο.

Για το δρόμο Γ_1: $\oint_{\Gamma_1} \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = 0 \Rightarrow \bar{B}_{\epsilon\xi\omega} = 0$

Για το δρόμο Γ_2: $\oint_{\Gamma_2} \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = \mu_0 n \ell I_0 \Rightarrow$

$$B\ell = \mu_0 n \ell I_0 \Rightarrow \boxed{\bar{B} = \mu_0 n I_0 \hat{z}}$$

Νόμοι Maxwell για μαγνητοστατική.

1) $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}$

2) $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$

Από 2) $\Rightarrow$ $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$

↳ διανυσματικό δυναμικό

Το διανυσματικό δυναμικό δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Πράγματι αν

$\bar{\nabla} \times \bar{A} = B$ τότε και $\bar{\nabla} \times \bar{A}' = \bar{B}$ όπου

$\bar{A}' = A + \nabla f$ (αφού $\nabla \times \nabla f = 0$)

ο μετασχηματισμός:

$$\boxed{\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \bar{\nabla} f}$$

λέγεται μετασχηματισμός βαθμίδας και αφήνει το μαγνητικό πεδίο αναλλοίωτο. Λόγω της συμμετρίας αυτής μπορώ να διαλέξω μία συνθήκη για το $\vec{A}$. π.χ

$A_3 = 0$ (αξονική βαθμίδα)

ή

$\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0$ (βαθμίδα Coulomb)

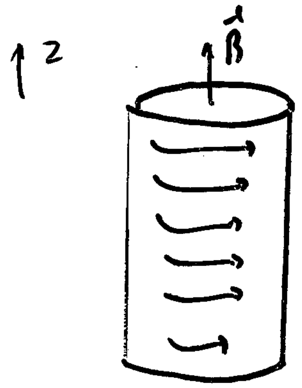
Η βαθμίδα Coulomb είναι πολύ βολική:

$$\bar{\nabla}\times\bar{B}=\mu_0\bar{J} \Rightarrow \bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})=\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A})-\nabla^2\bar{A}=\mu_0\bar{J} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2\bar{A}=-\mu_0\bar{J}}$$ βαθμίδα Coulomb

$$\Rightarrow \boxed{\bar{A}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\bar{J}(x')}{|x-x'|}d^3x'}$$

① Να υπολογιστεί το διανυσματικό δυναμικό σωληνοειδούς απείρου μήκους παντού στο χώρο

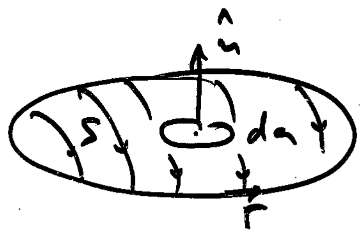


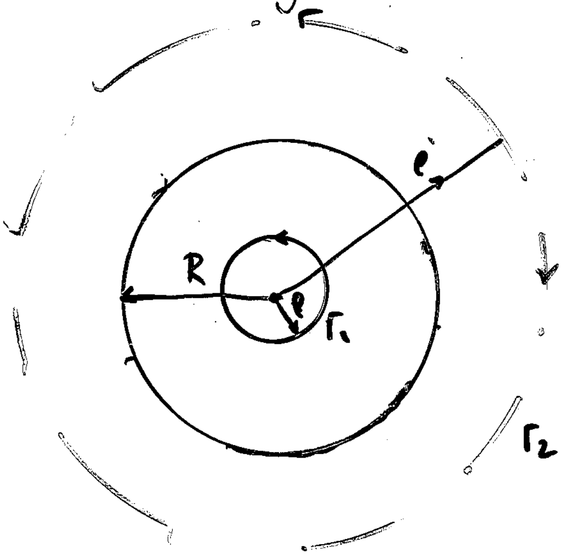
$$\bar{B} = \mu_0 n I \hat{z}$$

Επειδή $\bar{\nabla} \times \bar{A} = \vec{B} \Rightarrow$

$$\int_S \bar{\nabla} \times \bar{A} \cdot \hat{n}\, da = \int \bar{B} \cdot \hat{n} \cdot da \Rightarrow$$

$$\oint_\Gamma \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int_S \bar{B} \cdot \hat{n}\, da$$





1) $\oint_{\Gamma_1} \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int \bar{B} \cdot \hat{n}\, da \Rightarrow$

$$A_\varphi 2\pi\rho = B\, \pi\rho^2 \Rightarrow$$

$$A_\varphi^{<} = \frac{B}{2}\rho = \qquad \rho < R$$

$$= \frac{\mu_0 I n}{2}\rho$$

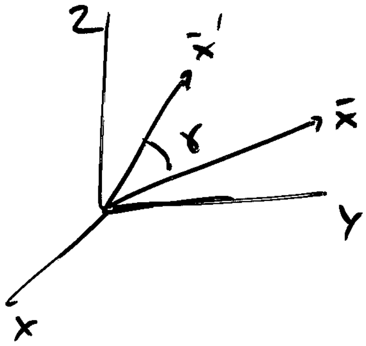
2) $\oint_{\Gamma_2} \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int B \cdot \hat{n}\, da \Rightarrow$

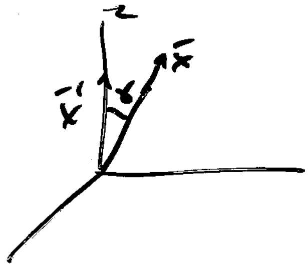
$$A_\varphi 2\pi\rho = B\, \pi R^2 \Rightarrow \quad A_\varphi = \frac{B}{2}\frac{R^2}{\rho} \Rightarrow$$

$$\boxed{A_\varphi^{>} = \frac{\mu_0 I n}{2}\frac{R^2}{\rho}} \qquad \rho > R$$

$$A_\varphi^{<}\Big|_{\rho=R} = A_\varphi^{>}\Big|_{\rho=R}$$

Πολυπολική ανάπτυξη:





$\frac{1}{|x-x'|}$ ικανοποιεί Laplace.

Κάνω στροφή έτσι ώστε το $\bar{x}'$ να

πάει στον z

Έτσι έχω αξονική συμμετρία και

$$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\gamma)$$

Πάνω στον άξονα: ($\gamma=0$ $\quad P_l(1)=1$)

$$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1-\frac{r'}{r}}\right) \overset{!}{=} \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l$$

$r > r'$

$$= \sum_l B_l \frac{1}{r^{l+1}} \Rightarrow B_l = 1, \quad A_l = 0$$

$$\frac{1}{|x-x'|} = \frac{1}{(r-r')} = \frac{1}{r'}\frac{1}{|1-\frac{r}{r'}|} = \frac{1}{r'}\sum_l\left(\frac{r}{r'}\right)^l \Rightarrow$$

$$B_l = 0, \quad A_l = \frac{1}{r'^{l+1}}$$

$$\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) & r>r' \\ \dfrac{1}{r'}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) & r<r' \end{cases}$$

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J_i(x')}{|x-x'|}\, d^3x' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\int J_i(x')\, d^3x' + \frac{1}{r^2}\int r' J_i \cos\theta + \dots\right.$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\int J_i(x')\, d^3x' + \frac{\vec{x}}{r^3}\cdot\int \bar{x}' J_i(x')\, d^3x' \dots\right.$$

Ισχύει για εντοπισμένο $\bar{J}$:

$$\bar{\nabla}(x_i \bar{J}) = (\bar{\nabla} x_i)\cdot\bar{J} + x_i\, \bar{\nabla}\cdot\bar{J} = J_i + x_i\, \bar{\nabla}\cdot\bar{J}$$

$$0 = \int \bar{\nabla}(x_i \bar{J})\, d^3x = \int J_i\, d^3x + \int x_i\, \underset{0}{\underbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{J}}}\, d^3x =$$

$$= \int J_i\, d^3x$$ έτσι:

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\bar{x}}{r^3}\cdot\int \bar{x}' J_i\, d^3x' + \dots$$

διπολικός όρος

Ομοίως:

$$\bar\nabla\cdot(x_i x_j \bar J) = (\bar\nabla x_i)\, x_j\cdot \bar J + x_i(\bar\nabla x_j)\cdot\bar J + x_i x_j\, \bar\nabla\cdot\bar J$$

$$= x_j J_i + x_i J_j + x_i x_j\, \cancel{\bar\nabla\cdot\bar J}^{\,0}$$

$$\int \bar\nabla(x_i x_j \bar J) = 0 = \int (x_i J_j + x_j J_i)\, d^3x$$

$$\bar x\cdot\int \bar x' J_i\, d^3x' = \sum_j x_j \int x_j' J_i\, d^3x'$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j x_j \int (x_j' J_i - x_i' J_j)\, d^3x'$$

$$= -\frac{1}{2} \sum x_j\, \varepsilon_{ijk}\int (\bar x'\times \bar J)_k\, d^3x'$$

$$= -\frac{1}{2}\, \bar x\times\int(\bar x'\times\bar J)\, d^3x'$$

$$\bar A = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r^3}\left(-\frac{1}{2}\, \bar x\times\int(\bar x'\times\bar J)\, d^3x'\right) + \dots$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\bar m\times\bar x}{r^3} + \dots \qquad \bar m = \frac{1}{2}\int \bar x'\times\bar J\, d^3x'$$

μαγνητική διπολική ροπή.