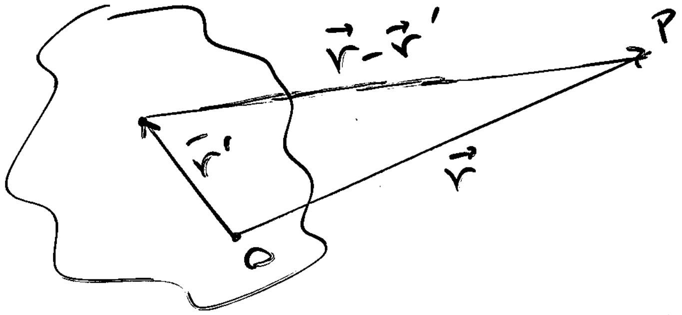
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΕ ΠΟΛΥΠΟΛΑ.



$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')\, d^3x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = $$
$$= \sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}'\cdot\vec{r}}$$

$|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}'\vec{r}}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}}_{x}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\dots$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2r^2}(r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}')+\frac{3}{8r^4}(r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}')^2+\dots\right.$$

$$= \frac{1}{r}\left[1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}+\frac{3(\vec{r}'\cdot\vec{r})-r^2r'^2}{2r^4}+\dots\right]$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\int d^3x\, \rho(r')\left[\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3}+\frac{1}{2}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}')-r^2r'^2}{r^5}+\dots\right]\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{r_i Q_{ij} r_j}{r^5}+\dots\right]$$

$q = \int d^3r' \rho(r')$, $\vec{p} = \int \vec{r}'\rho(r')d^3r'$ $\quad Q_{ij} = \int d^3r'\rho(r')[3r_i'r_j'-r'^2\delta_{ij}]$

ολικό φορτίο — διπολική ροπή — τετραπολική ροπή

$+ \dots$

I): Έστω κατανομή φορτίου

$$\rho = \frac{Q}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta$$

Να βρεθεί το δυναμικό στην πολυπολική ανάπτυξη σε τετραπολική προσέγγιση.

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{\bar{r}\cdot\bar{p}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{r_i r_j Q_{ij}}{r^5} \right)$$

$$q = \int d^3r\, \rho(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{Q}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta \; r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = Q$$

$$p_x = \int d^3r\, \rho(r)\, x = \int \frac{Q}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta \,(r \sin\theta \cos\varphi)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 0$$

$$p_y = \int d^3r\, \rho(r)\, y = \int \frac{Q}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta \,(r \sin\theta \cos\varphi)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 0$$

$$p_z = \int d^3r\, \rho(r)\, y = \int \frac{Q}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta \,(r \cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = 0$$

$$\boxed{\vec{p} = 0}$$

$$Q_{ij} = \int d^3r\, \rho(r) \left(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij} \right)$$

Έτσι για παράδειγμα:

$$Q_{xx} = \int d^3r\, \rho(r) \left(3x^2 - r^2 \right) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{q}{64\pi}\, r^2 e^{-r} \sin^2\theta \left(3r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi - r^2\right) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 6q$$

$$Q_{yy} = \int d^3r\, \rho(r) \left(3y^2 - r^2 \right) = 6q$$

$$Q_{zz} = \int d^3r\, \rho(r) \left(3z^2 - r^2 \right) = -12q$$

$$Q_{xy} = \int d^3r\, \rho(r) \left(3xy \right) = 0$$

$$Q_{xz} = \int d^3r\, \rho(r) \left(3xz \right) = 0$$

$$Q_{yz} = \int d^3r\, \rho(r) \left(3zy \right) = 0$$

II. Να βρεθεί το δυναμικό σε τετραπολική προσέγγιση από δύο ομόκεντρους δακτυλίους ακτίνων, a και b και φορτία q και −q αντίστοιχα ομοιόμορφα κατανεμημένα.

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{o\lambda}}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar{p}\cdot\bar{r}}{r^3} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}\frac{r_i r_j Q_{ij}}{r^5}}$$

κυλινδρικές συντεταγμένες (r,φ,z) $\quad \rho = \frac{q}{2\pi a}\,\delta(r-a)\,\delta(z) - \frac{q}{2\pi b}\,\delta(r-b)\,\delta(z)$

$$q_{o\lambda} = \int \rho(r)\, d^3r = 0$$

$$p_x = \int \rho(r)\, x\, d^3r = \int \rho(r)\,(r\cos\varphi)\, r\,dr\,dz\,d\varphi = 0$$

$$p_y = \int \rho(r)\,(r\sin\varphi)\, r\,dr\,dz\,d\varphi = 0$$

$$p_z = \int \rho(r)\, z\, r\,dr\,dz\,d\varphi = 0 \qquad (\text{από } z\,\delta(z))$$

$$Q_{ij} = \int \rho(r)\,(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\, d^3r$$

$\int \cos\varphi\, d\varphi = 0$

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{q}{2}\,(a^2 - b^2)$$

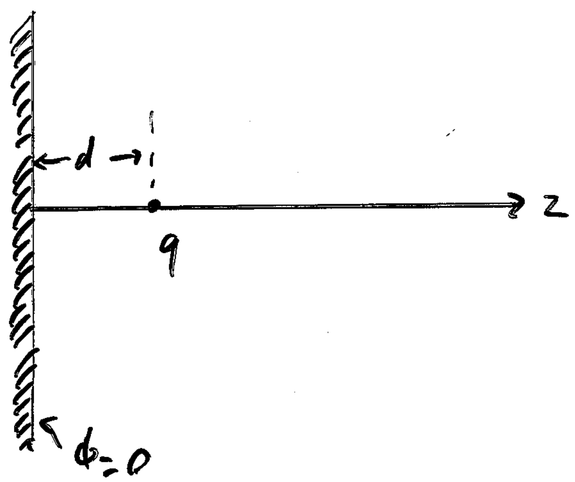
$\int_0 \sin\varphi\, d\varphi = 0$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΙΔΩΛΩΝ.

Χρησιμοποιείται για να βρούμε το πεδίο σημειακών φορτίων παρουσία εκτεταμένων συνοριακών συνθηκών.

Διαλέγουμε φορτίο και θέση του ειδώλου έτσι ώστε το πεδίο που δημιουργεί μαζί με το πεδίο των αρχικών φορτίων να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

Παράδειγμα:



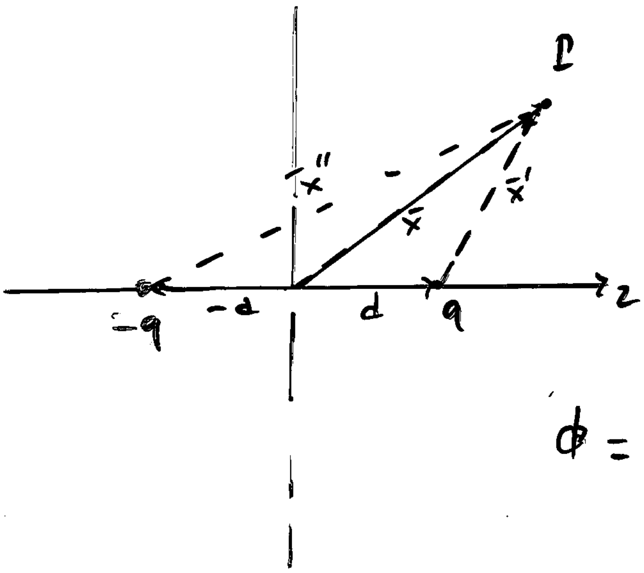
αγώγιμο επίπεδο στο $z=0$.

Βρείτε το δυναμικό για $z>0$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\phi(x,y,0)=0$$

$$\phi \to 0 \quad |\vec{x}| \to \infty$$



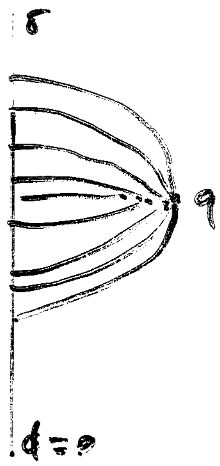
$$\bar{x}' = \bar{x} - \bar{d}$$
$$\bar{x}'' = \bar{x} + \bar{d}$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\bar{x}'|} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\bar{x}''|}$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right)$$

$$\phi(x,y,0) = 0$$

$$\phi \to 0 \qquad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty$$

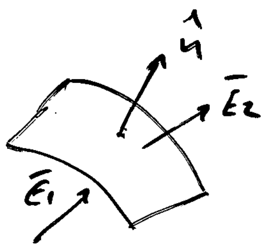


αγώγιμο επίπεδο

Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho/\varepsilon_0$$

Από Gauss



$$(\bar{E}_2 - \bar{E}_1)\cdot\hat{n} = \sigma/\varepsilon_0$$

Στην περίπτωση μας: $\bar{E}\cdot\hat{n}\Big|_0 = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow$

$$\boxed{\sigma = -\varepsilon_0\,\bar{\nabla}\phi\cdot\hat{n}\Big|_0}$$

$$\hat{n} = \hat{z} \Rightarrow \boxed{\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}\bigg|_{z=0}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-(z-d)}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}} + \frac{(z+d)}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{-2qd}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{qd}{2\pi} \frac{1}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}}$$

<u>Ποιά δύναμη εφαρμόζεται στο αγώγιμο επίπεδο;</u>

Δύναμη που εφαρμόζεται στο φορτίο q από το είδωλό του:

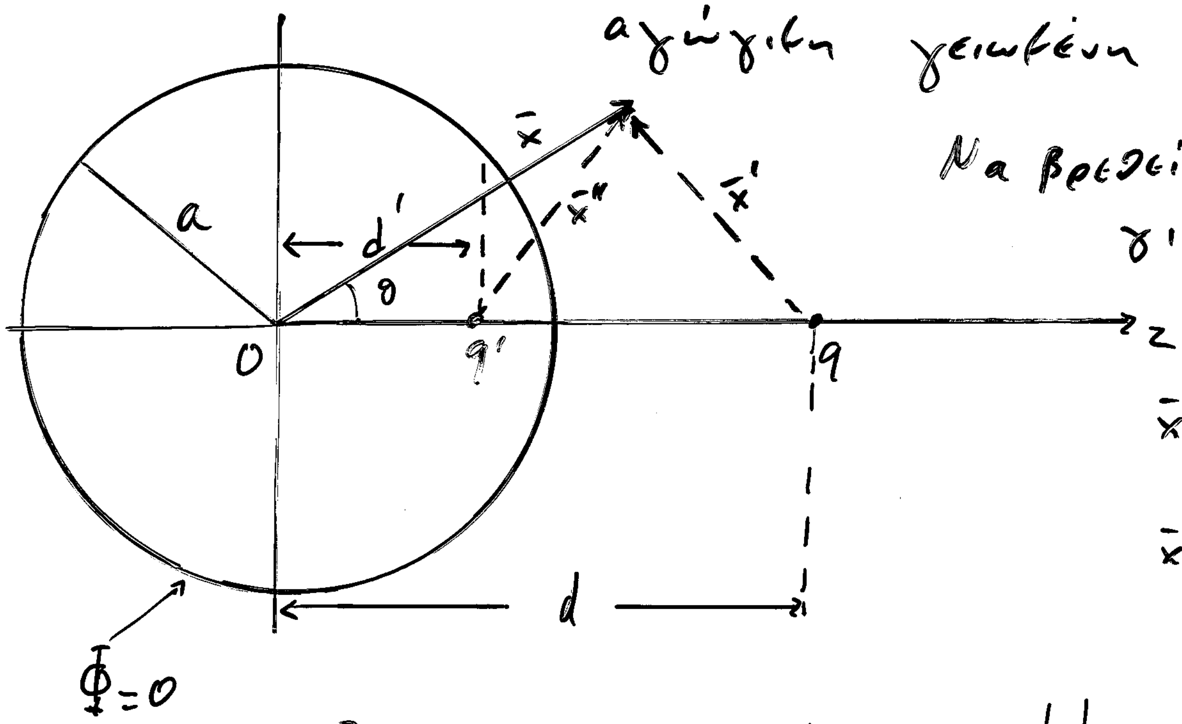
$$\boxed{F_q = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2d)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}}$$

Η δύναμη πάνω στον τοίχο πρέπει να είναι ίση και αντίθετη:

$$\boxed{F_w = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}}$$

Παράδειγμα 2: Σημειακό φορτίο κοντά σε αγώγιμη γειωμένη σφαίρα.

Να βρεθεί το δυναμικό για $x^2+y^2+z^2>a^2$



$\bar{x}' = \bar{x} - \bar{d}$

$\bar{x}'' = \bar{x} - \bar{d}'$

Συνοριακές συνθήκες: $\Phi\big|_{r=a} = 0$

$\Phi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει είδωλο $\underline{\underline{q'}}$ σε απόσταση d' από το κέντρο O και πάνω στην ευθεία που συνδέει το φορτίο q και το κέντρο O.

Το δυναμικό θα είναι τότε:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\bar{x}'|} + \frac{q'}{|\bar{x}''|}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d')^2}}\right]$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\theta}}\right]}$$

Συνοριακή συνθήκη: $\phi(a,\theta,\varphi)=0 \quad (\forall\, \theta,\varphi)$

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2+d'^2-2ad'\cos\theta}}\right)$$

Για να έχουμε ίδια θ-εξάρτηση στους δύο όρους πρέπει:

$$\frac{2ad}{a^2+d^2} = \frac{2ad'}{a^2+d'^2} \Rightarrow$$

$$(a^2+d'^2)d = (a^2+d^2)d' \Rightarrow$$

$$dd'^2 - (a^2+d^2)d' + a^2 d = 0 \Rightarrow$$

$$d' = \frac{a^2+d^2 \pm \sqrt{(a^2+d^2)^2-4a^2d^2}}{2d} =$$

$$= \frac{a^2+d^2 \pm \sqrt{(a^2-d)^2}}{2d} = \begin{cases} d \\ a^2/d \end{cases}$$

Η λύση $d' = d$ είναι τετριμμένη ($\phi = 0$ παντού)

Έτσι: $\boxed{d' = \dfrac{a^2}{d}}$

Και τότε: $\phi(a, \theta, \varphi) = 0 \Rightarrow q + \dfrac{d q'}{a} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{q' = -\frac{a}{d} q}$$

– Επιφανειακή πυκνότητα:

$$\sigma = -\epsilon_0 \bar{\nabla}\phi \cdot \hat{n}\Big|_S \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}\Big|_{r=a}}$$

– Ποιά δύναμη ασκεί το φορτίο q στην αγώγιμη σφαίρα;

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+d'^2-2rd'\cos\theta}}\right]}$$

Συνοριακή συνθήκη: $\phi(a,\theta,\varphi) = 0 \quad (\forall\, \theta,\varphi)$

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2+d'^2-2ad'\cos\theta}}\right)$$

Για να έχουμε ίδια θ-εξάρτηση στους δύο όρους πρέπει:

$$\frac{2ad}{a^2+d^2} = \frac{2ad'}{a^2+d'^2} \Rightarrow$$

$$(a^2+d'^2)d = (a^2+d^2)d' \Rightarrow$$

$$dd'^2-(a^2+d^2)d'+a^2d=0 \Rightarrow$$

$$d' = \frac{a^2+d^2 \pm \sqrt{(a^2+d^2)^2-4a^2d^2}}{2d} =$$

$$= \frac{a^2+d^2\pm\sqrt{(a^2-d)^2}}{2d} = \begin{cases} d \\ a^2/d \end{cases}$$

Η λύση $d' = d$ είναι τετριμμένη ($\Phi = 0$ παντού)

Έτσι: $$\boxed{d' = \frac{a^2}{d}}$$

Και τότε: $\Phi(a, \theta, \varphi) = 0 \Rightarrow q + \frac{d q'}{a} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{q' = -\frac{a}{d} q}$$

– Επιφανειακή πυκνότητα:

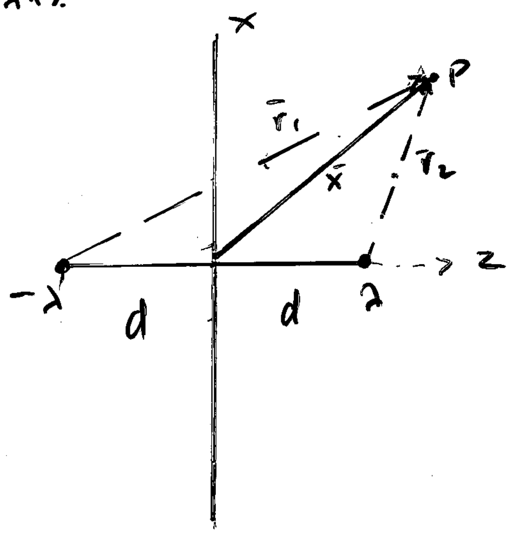
$$\sigma = -\epsilon_0 \vec{\nabla}\Phi \cdot \hat{n}\Big|_S \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\Big|_{r=a}}$$

– Ποιά δύναμη ασκεί το φορτίο q στην αγώγιμη σφαίρα;

Γραμμή φορτίου μπροστά σε γειωμένο αγώγιμο έλασμα

φύλλο.



$$\bar{x} = \bar{d} + \bar{r}_2 \Rightarrow \bar{r}_2 = \bar{x} - \bar{d}$$

$$-\bar{d} + \bar{r}_1 = \bar{x} \Rightarrow \bar{r}_1 = \bar{x} + \bar{d}$$

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln|\bar{x}|$$

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln|r_2| + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln|r_1| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|r_1|}{|r_2|} \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + d^2 + 2rd\cos\theta}}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x^2 + (z+d)^2)}{(x^2 + (z-d)^2)}$$

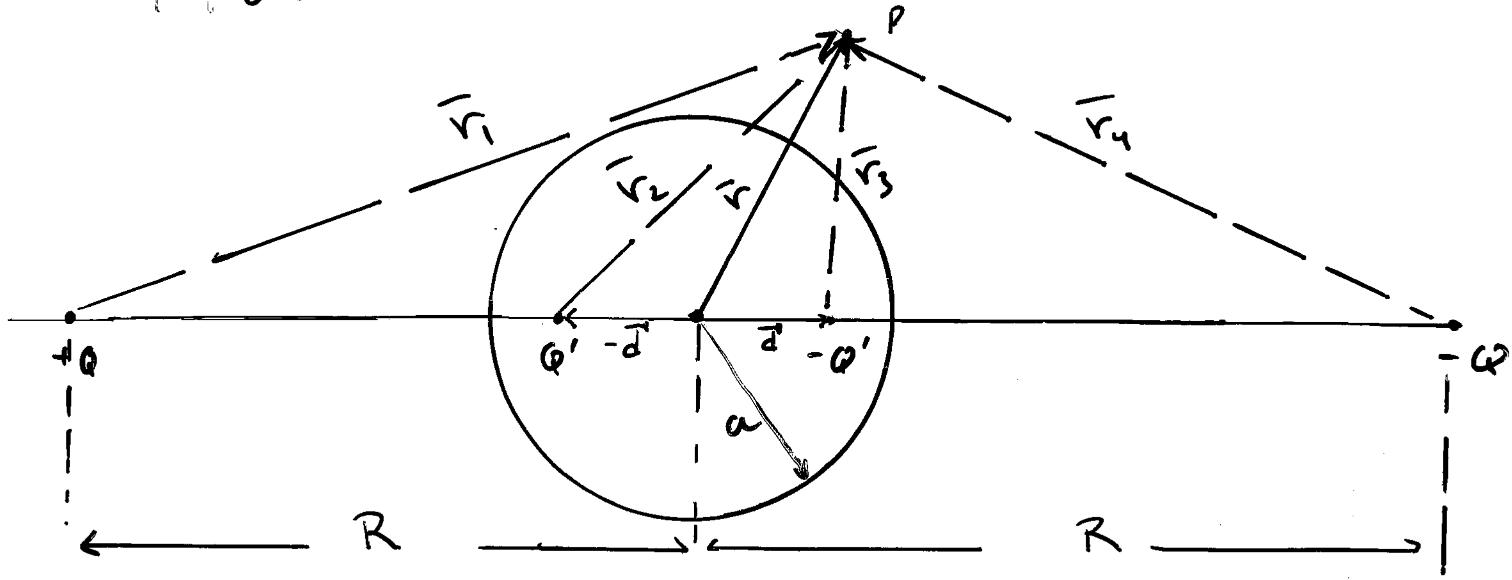
Επιφανειακή πυκνότητα:

$$\sigma = \epsilon_0 \bar{E}\cdot\hat{n}\Big|_S = -\epsilon_0 \bar{\nabla}\phi\cdot\hat{n}\Big|_S$$

$$\sigma = -\epsilon_0 \,\partial_z \phi\Big|_{z=0} = -\frac{\epsilon_0 \lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2(z+d)}{|r_1|^2} - \frac{2(z-d)}{|r_2|^2}\right]_{z=0} =$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi}\left[\frac{4d}{x^2+d^2}\right] = -\frac{\lambda d}{\pi}\frac{1}{x^2+d^2}$$

Σφαιρικός αγωγός σε εξωτερικό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$



$$Q' = -\frac{a}{R}Q \qquad \bar{r}_1 = \vec{r} + R\hat{z} \qquad \bar{r}_3 = \vec{r} - d\hat{z}$$

$$\bar{r}_2 = \vec{r} + d\hat{z} \qquad \bar{r}_4 = \bar{r} - R\hat{z}$$

$$\vec{d} = d\hat{z} = \frac{a^2}{R}\hat{z}$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r_1|} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r_2|} - \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r_3|} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r_4|} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+R^2+2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{R}\frac{1}{(r^2+d^2+2rd\cos\theta)^{1/2}}$$

$$+ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{R}\frac{1}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)}$$

Πεδίο από φορτία $Q, -Q$ σε απόσταση R:

$$E_0 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}$$

$Q, R \to \infty$ έτσι ώστε $\frac{Q}{R^2}$ πεπερασμένο

π.χ. $Q = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^2$ και παίρνουμε το $R \to \infty$

Αναπτύσσουμε το ϕ για $R \to \infty$ ($d \to 0$):

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2 + 2rR\cos\theta}{R^2} + \dots \right]$$

$$- \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2 - 2rR\cos\theta}{R^2} + \dots \right]$$

$$- \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{R} \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 + 2rd\cos\theta}{r^2} + \dots \right]$$

$$+ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a}{R} \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{d^2 - 2rd\cos\theta}{r^2} + \dots \right] =$$

$$= - \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^2} \cos\theta + \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{a^3}{r^2} \cos\theta + \dots =$$

$$= - E_0 r\cos\theta + E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta + \dots \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi = - E_0 \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\theta}$$

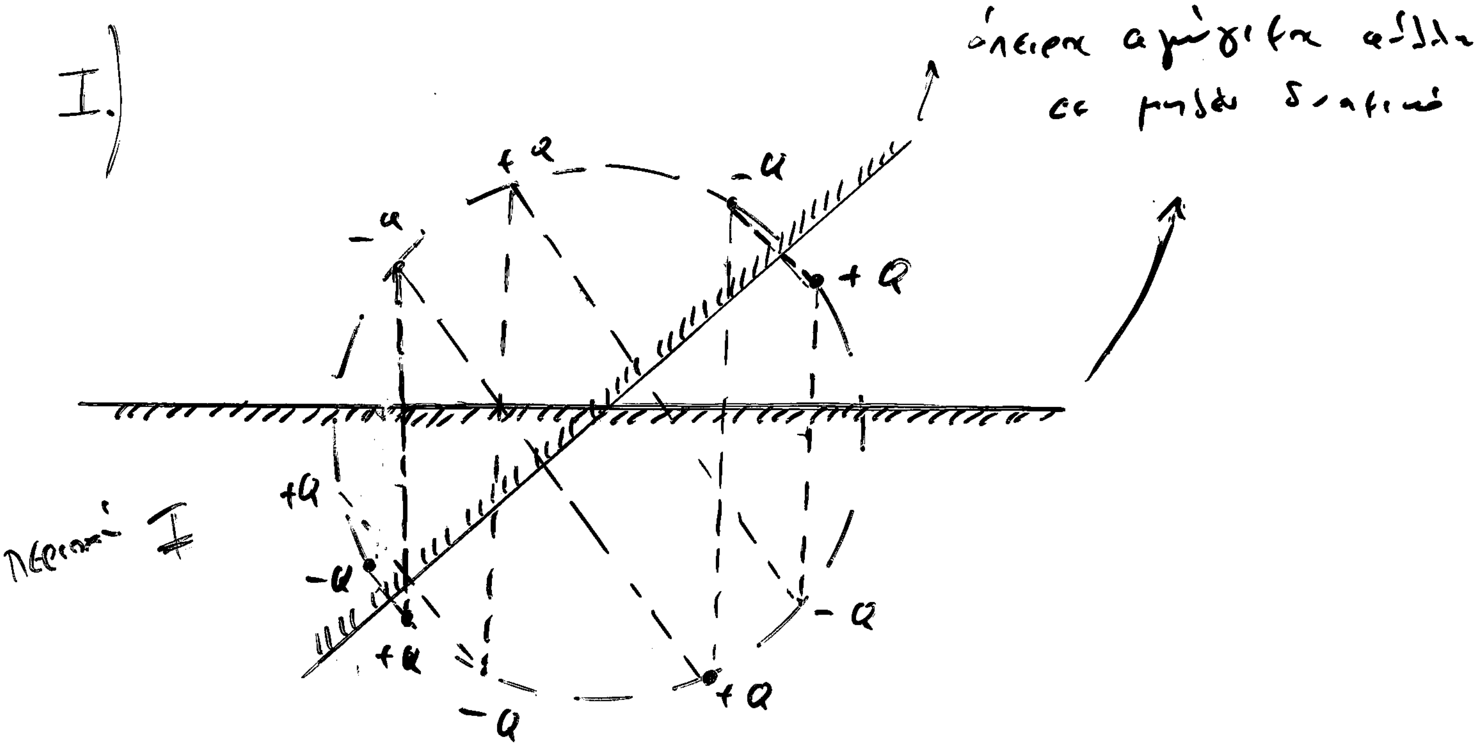
Επιφανειακή πυκνότητα:

$$\sigma = - \varepsilon_0 \vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n} \Big|_{r=a} = - \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

$$Q_{o\lambda} = \int \sigma \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 3\varepsilon_0 E_0 \, 2\pi \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \underline{\underline{0}}$$

Πολλαπλά είδωλα:

I.)

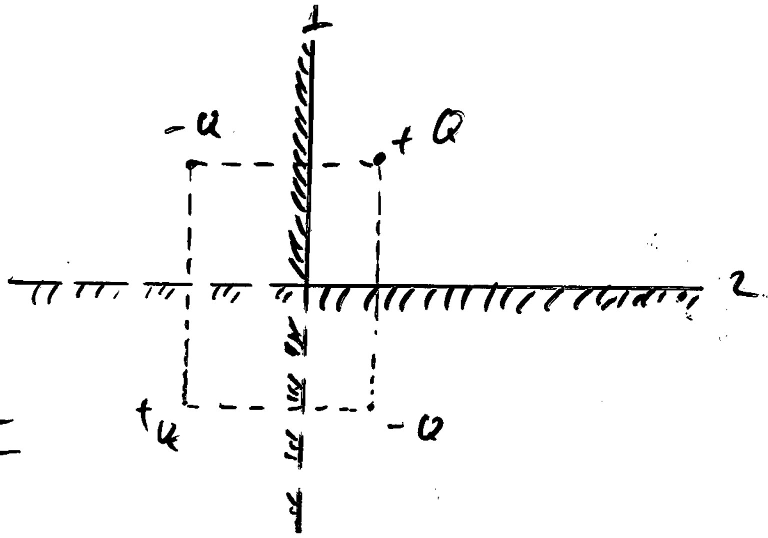


Περιοχή I: πίσω και από τους 2 αγωγούς.

Η συνέχεια των ειδώλων σταματά όταν όλα τα είδωλα βρεθούν στην περιοχή I.

II

Περιοχή I

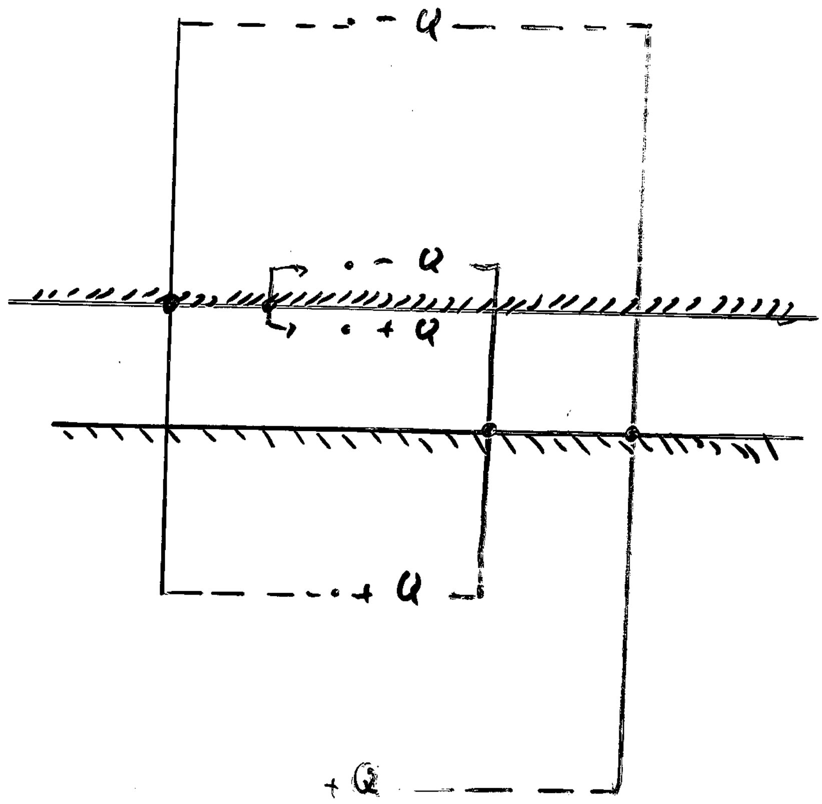


κάθετα αγώγιμα φύλλα σε δυναμικό μηδέν

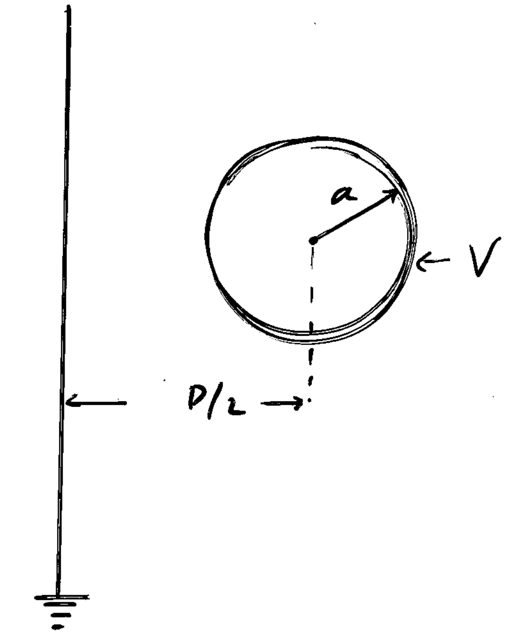
Είδωλα ως προς τα επίπεδα 1, 2. Σταματάμε πάλι αν βρεθούμε στην περιοχή I (πίσω από τους αγωγούς 1, 2).

III)

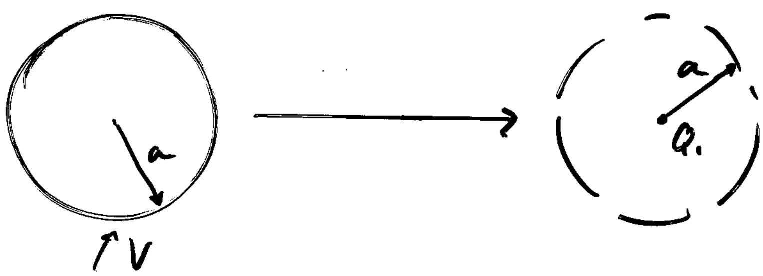
Πυκνωτής με φορτίο +Q ανάμεσα στους οπλισμούς του.



- Αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a σε δυναμικό V σε απόσταση $\frac{D}{2}$ μπροστά από άπειρο γειωμένο αγώγιμο φύλλο. Να βρεθεί η χωρητικότητα του συστήματος.

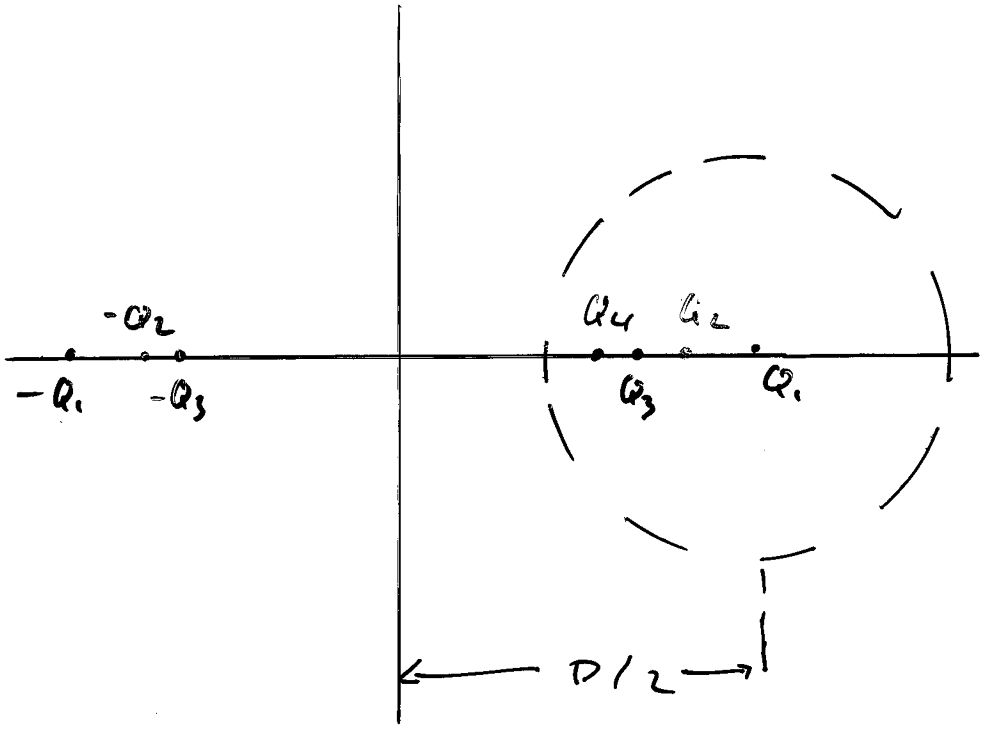


$$C = \frac{Q}{V} \qquad Q = ?$$



$$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

$$\boxed{Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 a V}$$



Είδωλο του		σε απόσταση από το κέντρο της σφαίρας
1) Q_1	$-Q_1$	D $\boxed{r = \frac{a}{D}}$
2) $-Q_1$	$Q_2 = \frac{a}{D} Q_1 = r Q_1$	$\frac{a^2}{D} = ar$
3) Q_2	$-Q_2$	$D - ar$
4) $-Q_2$	$Q_3 = \frac{a}{D-ar} Q_2 = \frac{r^2}{1-r^2} Q_1$	$\frac{a^2}{D-ar} = \frac{ar}{1-r^2}$
Q_3	$-Q_3$	$D - \frac{ar}{1-r^2}$
$-Q_3$	$Q_4 = \frac{a}{D - \frac{ar}{1-r^2}} \frac{r^2}{1-r^2} Q_1 = \frac{r^3}{1 - \frac{r^2}{1-r^2}} \frac{1}{1-r^2} Q_1$	$\frac{a^2}{D - \frac{ar}{1-r^2}} = \frac{ar}{1 - \frac{r^2}{1-r^2}}$

Χωρητικότητα:

$$C = \frac{q}{V}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots = q_1\left[1 + r + \frac{r^2}{1-r^2} + \frac{r^3}{(1-r^2)\left(1-\frac{r^2}{1-r^2}\right)} + \frac{r^4}{(1-r^2)\left(1-\frac{r^2}{1-r^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{1-\frac{r^2}{1-r^2}}\right)} + \cdots\right]$$

$\Rightarrow$

$$C = 4\pi\epsilon_0 a\left[1 + r + \frac{r^2}{1-r^2} + \frac{r^3}{(1-r^2)\left(1-\frac{r^2}{1-r^2}\right)} + \frac{r^4}{(1-r^2)\left(1-\frac{r^2}{1-r^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{1-\frac{r^2}{1-r^2}}\right)} + \cdots\right]$$

$\boxed{r = \frac{a}{D}} \Rightarrow \quad D \to \infty, \quad r \to 0, \quad C \to 4\pi\epsilon_0 a$