$\boxed{\text{ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE}}$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.

Εξίσωση Laplace: $\nabla^2 \Phi = 0$

σφαιρικές (r, θ, φ) συντεταγμένες:

$$\nabla^2 \Phi = \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0}$$

Χωρισμός μεταβλητών: Υποθέτουμε λύση της μορφής

$$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) \Rightarrow$$

$$PQ\frac{1}{r}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^3\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{UP}{r^3\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0$$

Πολλ/ζω με $\frac{r^3\sin^2\theta}{UPQ} \Rightarrow$

$$\underbrace{r^3\sin^2\theta\left[\frac{1}{r}\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{1}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right]}_{=+m^2} + \underbrace{\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}}_{=-m^2} = 0$$

γ)

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 \Rightarrow \boxed{Q = e^{\pm im\varphi}}$$

Q μονότιμη $\left(Q(\varphi) = Q(\varphi+2\pi) \right) \Rightarrow$

$m =$ ακέραιος

Ομοίως

$$\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2} = K^2 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[K^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0 \qquad (2)$$

Θέτω $x = \cos\theta \Rightarrow$ (2) γίνεται: $\left(\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + \left(K^2 - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P = 0 \qquad (3)$$

(3) προσαρτημένη διαφορική εξίσωση Legendre

Έχει λύσεις πεπερασμένες για $-1<x<1$

Μη-πεπερασμένες στο $x = \pm 1$.

Πεπερασμένες λύσεις και στο $x = \pm 1$ μόνον

για $K^2 = \ell(\ell+1)$ $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

$|m| \leq \ell$

3)

Λύσεις τότε της εξίσωσης (2):

$P^{\ell}_{m}(\cos\theta) \to$ συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους.

Για $\underline{\underline{m=0}}$ $\quad P^{\ell}_{0}(\cos\theta) = P_{\ell}(\cos\theta)$

↳ πολυώνυμα Legendre

Για $k^2 = \ell(\ell+1)$ η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} U = 0 \Rightarrow \boxed{U = A_\ell r^{\ell+1} + B_\ell r^{-\ell}}$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι σφαιρικές αρμονικές

$$Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \sim P^{\ell}_{m}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

ικανοποιούν:

$$L^2 Y_{\ell m} = \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) Y_{\ell m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$$

$$L_z Y_{\ell m} = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{\ell m} = m\, Y_{\ell m}$$

Γενική λύση εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντ.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right] P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}}$$

<u>Πολυώνυμα Legendre</u> $\quad P_l(x) = P_0^l(x)$

$P_0(x) = 1 \qquad -1 \le x \le 1$

$P_1(x) = x$

$\boxed{P_l(0) = 1}$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

Τύπος του Rodrigues: $\quad \boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l}$

Τύπος ορθογωνιότητας: $\quad \boxed{\int_{-1}^{1} P_{l'}(x) P_l(x)\, dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}}$

Πλήρες σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων στο $[-1,1]$

$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \qquad A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_l(x)\, dx$

Συμμετρίες:

1) Αξονική

Σε περίπτωση που έχουμε αξονική συμμετρία, η γενική λύση:

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(A_{\ell m}r^{\ell}+\frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}}\right)P_m^{\ell}(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

δεν πρέπει να εξαρτάται από το φ (στροφές γύρω από τον άξονα συμμετρίας). Αυτό είναι δυνατόν αν $m=0$. Άρα:

γενική λύση Laplace σε σφαιρικές συντετ. και αξονική συμμετρία:

$$\boxed{\Phi(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_{\ell}r^{\ell}+\frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}}\right)P_{\ell}(\cos\theta)}$$

2) Σφαιρική

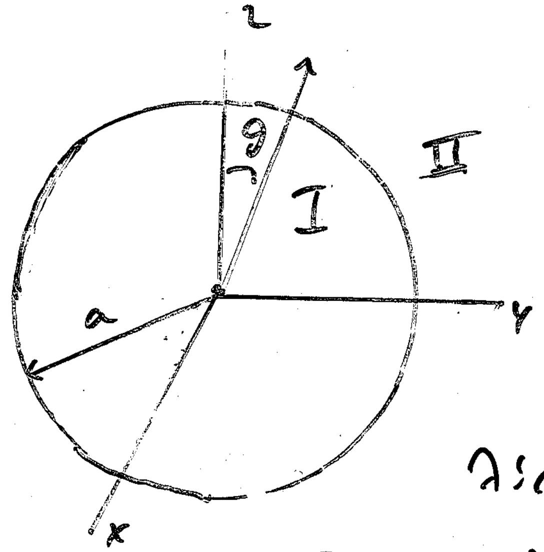
Λύση ανεξάρτητη του θ $\Rightarrow$ $\underline{\ell=0}$

$$\boxed{\Phi(r)=A+\frac{B}{r}}$$

1). Σφαίρα ακτίνας a έχει δυναμικό στην επιφάνεια της:

$$V(a,\theta) = V_0 \sin^2\theta$$

Να βρεθεί το δυναμικό παντός στο χώρο.



Επειδή το δυναμικό στην επιφάνεια εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ, υπάρχει αξονική συμμετρία. Άρα οι λύσεις είναι:

$$\Phi_I = \sum_\ell \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{Περιοχή I } r \le a$$

$$\Phi_{II} = \sum_\ell \left(C_\ell r^\ell + \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}}\right) P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{Περιοχή II } r \ge a$$

Συνοριακές συνθήκες:

1) Δυναμικό πεπερασμένο στο $r=0$ $\Rightarrow$ $B_\ell = 0$

2) Δυναμικό $= 0$ στο $r\to\infty$ $\Rightarrow$ $C_\ell = 0$

(1), (2) $\Rightarrow$

$$\Phi_I = \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) \qquad r \le a$$

$$\Phi_{II} = \sum_\ell \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \qquad r \ge a$$

7/

3) Συνέχεια του δυναμικού στο $r=a$

$$\Phi_I(a,\theta) = \Phi_{II}(a,\theta) \Rightarrow$$

$$\sum_l A_l a^l P_l = \sum_l \frac{D_l}{a^{l+1}} P_l \Rightarrow \quad D_l = A_l a^{2l+1}$$

$$\Phi_I = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\Phi_{II} = \sum_l A_l \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

Μόνοι άγνωστοι τα A_l. Προσδιορισμός των A_l

από συνοριακή συνθήκη:

4) $$V(a,\theta) = \Phi_I(a,\theta) = \sum_l A_l a^l P_l(\cos\theta) \Rightarrow$$

$$V_0 \sin^2\theta = A_0 P_0 + A_1 a P_1 + A_2 a^2 P_2 + \dots \Rightarrow$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \dots$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = P_1(\cos\theta) - \left(\frac{2P_2(\cos\theta)+1}{3}\right) = P_1 - \frac{2P_2+P_0}{3}$$

$$V_0 P_0 - \frac{V_0}{3}(2P_2 + P_0) = A_0 P_0 + A_1 a P_1 + A_2 a^2 P_2 \dots \Rightarrow$$

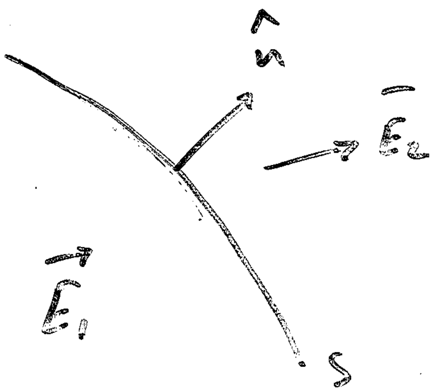
$A_l = 0$ εκτός $\quad A_0 = \frac{2V_0}{3}, \quad A_2 = -\frac{2V_0}{3a^2}$

$$\boxed{\Phi_I = \frac{2V_0}{3} - \frac{2V_0}{3a^2} r^2 P_2 = \frac{2V_0}{3} - \frac{V_0}{3a^2} r^2 (3\cos^2\theta - 1)}$$

μονοπολικός όρος

$$\boxed{\Phi_{II} = \frac{2V_0}{3}\frac{a}{r} - \frac{V_0}{3}\frac{a^3}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)}$$

τετραπολικός



$$\left(\bar{E}_2 - \bar{E}_1\right)\cdot\hat{n}\Big|_S = \sigma/\varepsilon_0$$

Στην περίπτωση μας:

$$\left(\bar{E}_I - \vec{E}_{II}\right)\cdot n\Big|_{r=a} = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial \phi_I}{\partial r} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r}\Big|_{r=a} = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_\ell a^{\ell-1} P_\ell - \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \frac{A_\ell a^{2\ell+1}}{a^{\ell+2}} P_\ell = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cos\vartheta \Rightarrow$$

$$-A_1 P_1 - 2A_2 a P_2 + \dots - \frac{A_0}{a} P_0 - 2A_1 P_1 + \dots =$$

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} P_1 \Rightarrow$$

$A_\ell = 0 \quad \forall\, \ell \neq 1 \qquad -3A_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$A_1 = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$

$$\boxed{\Phi_I = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} r \cos\vartheta}$$

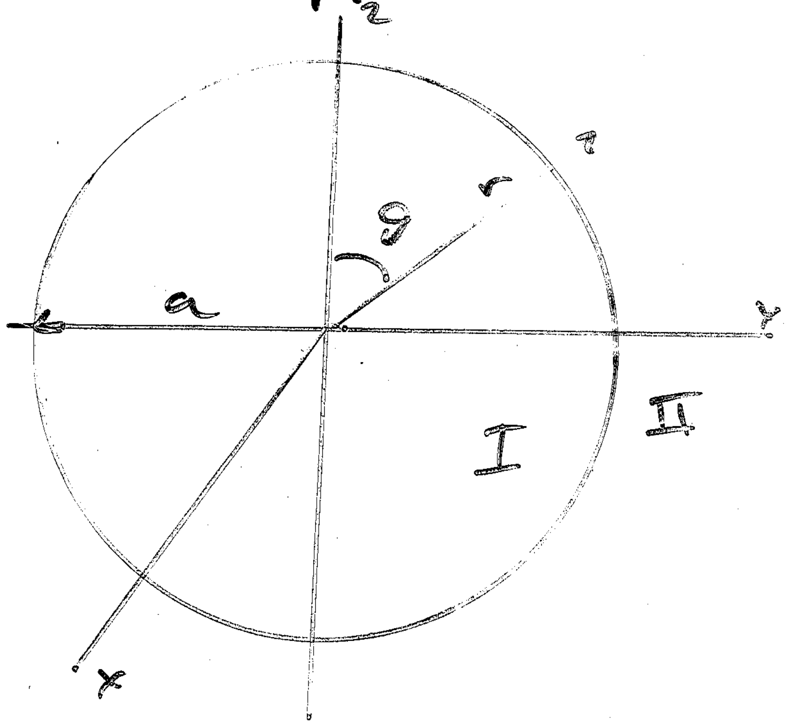
$$\boxed{\phi_{II} = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\frac{a^3}{r^2}\cos\vartheta}$$

⊛ Πόσο είναι το ηλεκτρικό πεδίο για $r \gg a$!

2) Σφαίρα ακτίνας a έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$$

Να βρεθεί το δυναμικό παντού στο χώρο.



Έχουμε αζιμουθιακή συμμετρία

Λύση:

$$\Phi_I = \sum_l \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

$$\Phi_{II} = \sum_l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

Συνοριακές συνθήκες:

1) Δυναμικό πεπερασμένο στο $r=0 \Rightarrow \underline{B_l = 0}$

2) —''— $= 0$ στο $r \to \infty \Rightarrow C_l = 0$

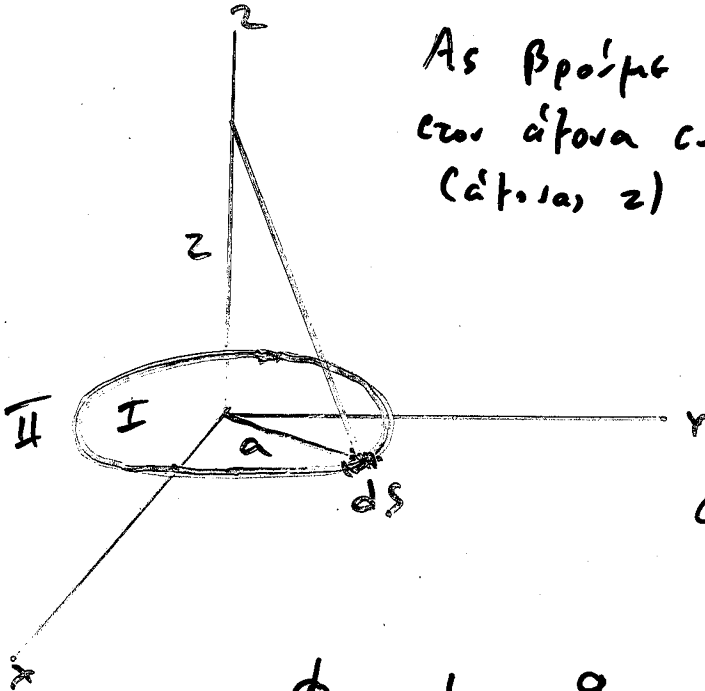
3) Συνέχεια του δυναμικού στο $r=a$ $D_l = A_l a^{2l+1}$

$$\Phi_I = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\Phi_{II} = \sum_l A_l \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

α/

3) Δακτύλιος ακτίνας a έχει φορτίο q ομοιόμορφα κατανεμημένο. Να βρεθεί το δυναμικό παντού στο χώρο.



Ας βρούμε το δυναμικό στον άξονα συμμετρίας (άξονας z)

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$dq = \frac{q}{2\pi a}\,ds$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\int dq \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

Ισχύει ότι: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} - \frac{5}{16}x^6 + \dots \quad x<1$

Άρα:

$z>a$: $\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{1}{z\sqrt{1+\frac{a^2}{z^2}}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{z^4}\dots\right) =$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^3} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{z^5} + \dots$$

$z<a$: $\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{1}{a\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{z^2}{a^2} + \frac{3}{8}\frac{z^4}{a^4} + \dots\right) =$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{a^3} + \frac{3}{8}\frac{z^4}{a^5} + \dots$$

10)

Εξαπλή η γενική λύση είναι:

$$\Phi_I = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{A_e r^l}{a} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{B_e r^2}{r^{l+1}}\right) P_e(\cos\theta) + \frac{3q}{32\pi\varepsilon_0}\frac{r^4}{a^5}P_4 \ldots$$

$$\Phi_{II} = \sum\left(C_e r^l + \frac{B_e}{r^{l+1}}\right) P_e(\cos\theta) \qquad r \geq a$$

$$\Phi_{II} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{3q}{32\pi\varepsilon_0}\frac{a^4}{r^5}P_4 + \ldots$$

Συνοριακές συνθήκες

1) Φ_I μονοσήμαντη πεπερασμένη στο $r=0$ (τετραπολική) $\Rightarrow B_e = 0$

2) $\Phi_{II} \to 0$ για $r \to \infty$ $\Rightarrow C_e = 0$

* Βρείτε όλους τους συντελεστές A_e

3) Συνέχεια στο $r=a$ $\Phi_I|_a = \Phi_{II}|_a \Rightarrow D_e = A_e a^{2l+1}$

χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum \qquad \Phi_I(r,\theta) = \sum_l A_e r^l P_e(\cos\theta)$$

$$\Phi_{II}(r,\theta) = \sum_l A_e \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} P_e(\cos\theta)$$

Για $\theta = 0$ έχουμε $\cos\theta = 1$ με $\underline{P_e(1) = 1}$

επίσης $z = r\cos\theta = r$

$$\boxed{\Phi_I(z,0) = \sum_l A_e z^l P_e(1) = \sum_l A_e z^l}$$

$$\boxed{\Phi_{II}(z,0) = \sum_l A_e \frac{a^{2l+1}}{z^l} P_e(1) = \sum_l A_e \frac{a^{2l+1}}{z^l}}$$

Άρα έχουμε από την απευθείας υπολ. του φ στον z

1) $$\phi_I(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{a^3} + \frac{3}{8}\frac{z^4}{a^5} + \dots\right)$$

2) $$\phi_{II}(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^3} + \frac{3}{8}\frac{a^4}{z^5} + \dots\right)$$

και

3) $$\phi_I(z) = \sum_\ell A_\ell z^\ell = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \dots$$

4) $$\phi_{II}(z) = \sum_\ell A_\ell \frac{a^{2\ell+1}}{z^{\ell+1}} = \frac{A_0 a}{z} + \frac{A_1 a^3}{z^2} + \frac{A_2 a^5}{z^3} + \frac{A_3 a^7}{z^4} + \dots$$

από τη γενική περίπτωση. Έτσι βρίσκουμε

$$A_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}, \qquad A_1 = 0$$

$$A_2 = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 a^3}, \qquad A_3 = 0$$

$$A_4 = \frac{3q}{32\pi\epsilon_0 a^5}, \qquad A_5 = 0$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$