ΒΑΘΜΩΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ

Έχουμε δει ότι:

$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(x')\, \frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}\, d^3x'}$$

Ας δούμε αν ικανοποιεί

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho/\varepsilon_0 .$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(x')\, \vec{\nabla}\left(\frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}\right) d^3x'$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)\hat{z}$$

Για παράδειγμα:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right) = -\frac{x-x'}{|x-x'|^3}$$

Έτσι:

$$\boxed{\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) = -\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}}$$

Έτσι:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(x')\,\vec{\nabla}\cdot\left[-\vec{\nabla}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right] d^3x'$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(x')\,\underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)}_{= -4\pi\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}')} d^3x' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(x')\,(-4\pi\,\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}')\,d^3x'$$

$$= \rho/\varepsilon_0 \qquad \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho/\varepsilon_0}$$

Επίσης πρέπει $\bar{\nabla}\times\bar{E} = 0$.

$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(x')\,\frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}\,d^3x' =$$

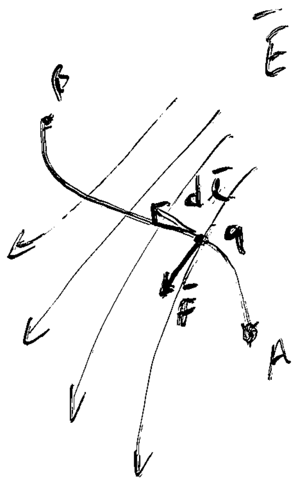
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(x')\left[-\vec{\nabla}\frac{1}{|x-x'|}\right] d^3x' = -\vec{\nabla}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(x')\,d^3x'}{|x-x'|}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\Phi}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,d^3x'}$$

Βαθμωτό δυναμικό

$\bar{\nabla}\times\bar{E} = -\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\phi = 0$ (ταυτότητα)



$$\bar{F} = q\vec{E}$$

Το έργο για τη μεταφορά του φορτίου από το Α στο Β είναι:

$$W = -\int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{\ell} = -q\int_A^B \bar{E}\cdot d\ell \Rightarrow$$

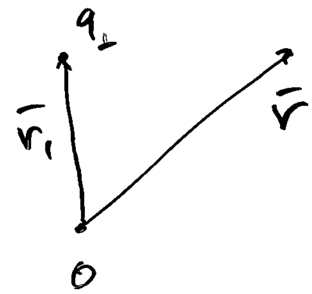
$$W = q\int \bar{\nabla}\cdot\phi\cdot d\bar{\ell} = q\int_A^B d\phi = q(\phi_B - \phi_A)$$

Έτσι $\underline{\underline{q\phi}}$ είναι η δυναμική ενέργεια

$$\int_A^B \vec{E}\, d\bar{\ell} = -(\phi_B - \phi_A) \Rightarrow$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\bar{\ell} = 0 \quad \left(\begin{array}{c} \text{ολοκληρωτική μορφή} \\ \bar{\nabla}\times\bar{E} = 0 \end{array} \right)$$

Σημειακό φορτίο:



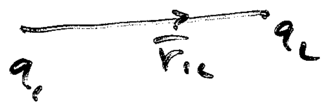
$$\rho = q_1 \, \delta^{(3)}(\bar{r} - \bar{r}_1)$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{q_1 \, \delta^{(3)}(\bar{r}' - \bar{r}_1) \, d^3 r'}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{|\bar{r} - \bar{r}_1|}}$$

Ενέργεια πεδίου:

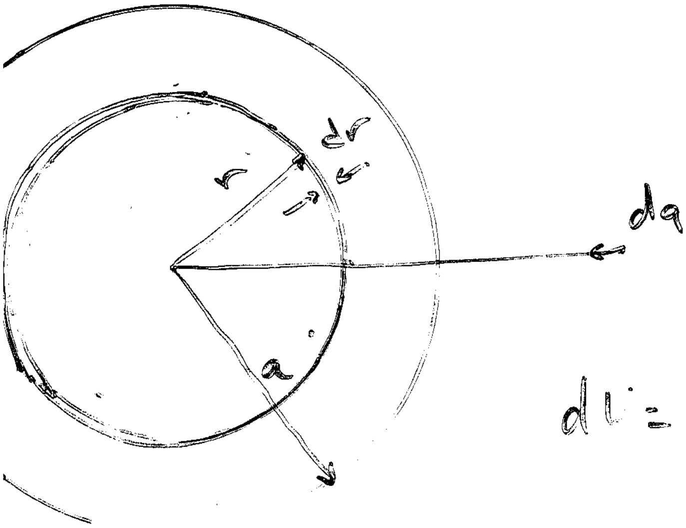
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



$$\boxed{U = \sum_{\substack{\text{όλα τα} \\ \text{ζεύγη}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

(3

Ενέργεια φορτισμένης σφαίρας: Feynman κεφ.8



$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,dq}{r}$$

$$q = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad dq = 4\pi\rho r^2 dr$$

$$dU = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0} \qquad U = \int_0^a dU \Rightarrow$$

$$U = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0} = \frac{3}{5}\,\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Γενική κατανομή:

παράγοντας συμμετρικής.

$$U = \left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{\rho(\bar r_1)\,\rho(\bar r_2)}{4\pi\epsilon_0|\bar r_1-\bar r_2|}\,d^3r_1\,d^3r_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int \rho(\bar r_1)\,\phi(\bar r_1)\,d^3r_1}$$

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\, \varphi\, d^3 r$$

$$\rho = \varepsilon_0 \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = -\varepsilon_0 \nabla^2 \phi$$

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \phi \nabla^2 \phi\, d^3 r =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \left[\nabla(\varphi \nabla\varphi) - \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\right] d^3 r$$

$$= \underbrace{-\frac{\varepsilon_0}{2}\int_S \varphi \bar{\nabla}\varphi\cdot\hat{n}\cdot dS}_{\text{Επιφανειακός όρος}} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\, d^3 r$$

$$\bar{\nabla}\varphi = -\bar{E}$$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{E}\, d^3 r$$

$$\boxed{U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |E|^2 d^3 r}$$

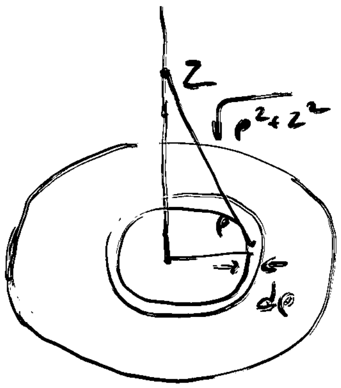
για $r \to \infty$ ο επιφανειακός όρος είναι:

$$\varphi \sim \frac{1}{r} \qquad \partial_r \varphi \sim \frac{1}{r^2} \qquad \bar{\nabla}\varphi\cdot\hat{n} = \partial_r \varphi \quad , \quad dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\varphi\, \bar{\nabla}\varphi\cdot\hat{n}\, dS \sim \frac{1}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Πρόβλημα Ι: Φορτίο q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια δίσκου ακτίνας a.

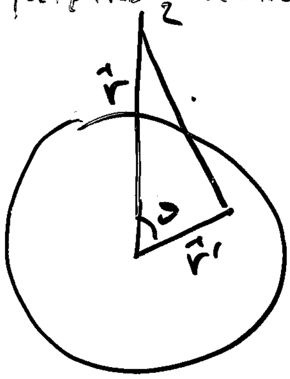
Βρείτε το δυναμικό στον άξονα του δίσκου.



$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{\pi a^2}\,\frac{2\pi\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

$$\varphi = \int_0^a \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,\frac{1}{}\,\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2}-|z|\right)$$

Πρόβλημα ΙΙ: Βρείτε το δυναμικό από φορτισμένο σφαιρικό κέλυφος ακτίνας R επιφανειακής πυκνότητας σ.



$$\rho(\vec{r}) = \sigma\,\delta(r-R)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')\,d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}$$

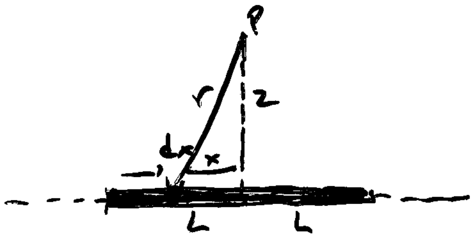
$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \sigma\,\delta(r'-R)\,\frac{r'^2\,dr'\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\sqrt{z^2+r'^2-2r'z\cos\theta}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}R^2\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta}} = \frac{R\sigma}{2z\epsilon_0}\left[\sqrt{(R+z)^2}-\sqrt{(R-z)^2}\right]$$

$$\phi = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 z}\left(|R+z| - |R-z| \right) \rightarrow$$

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{R^2\sigma}{\epsilon_0 z} & \text{έξω} \\ \dfrac{R\sigma}{\epsilon_0} & \text{μέσα} \end{cases} \qquad \left(\text{συνεχής στο } z = R\right)$$

<u>Πρόβλημα ΙΙ</u>: Ράβδος μήκους $2L$ έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα λ. Να βρεθεί το δυναμικό στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση z από το μέσο της ράβδου



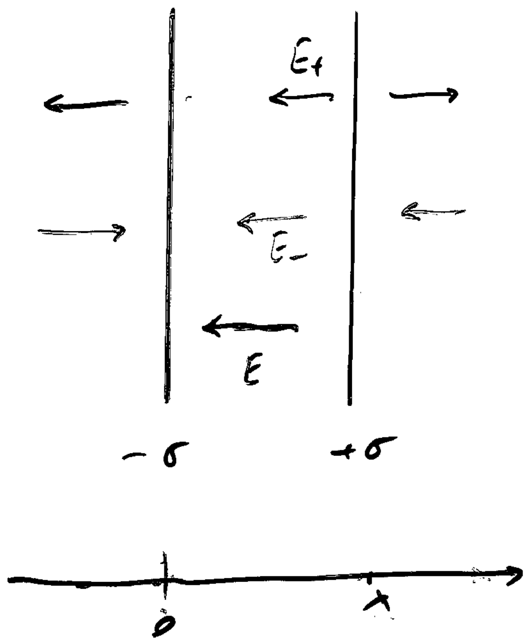
$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2+z^2}} \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(x+\sqrt{x^2+z^2}\right)\Big|_{-L}^{L}$$

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{L+\sqrt{z^2+L^2}}{-L+\sqrt{z^2+L^2}}$$

Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο όριο $L \rightarrow \infty$

Πρόβλημα IV. Να βρεθεί η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στους οπλισμούς επίπεδου (άπειρου) πυκνωτή. επιφανειακής πυκν. $+\sigma$, $-\sigma$, αντίστοιχα



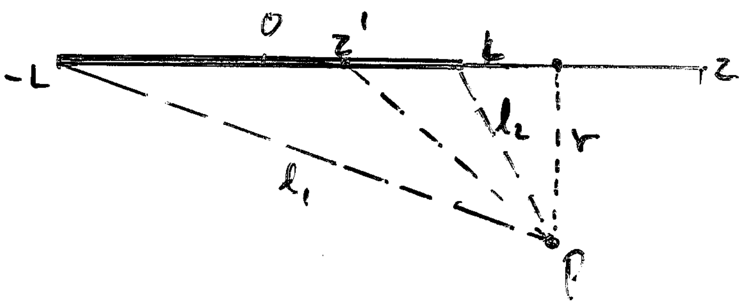
$$E_+ = E_- = \sigma/\varepsilon_0$$

$$E = E_+ + E_- = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{x} E^2\,dx' = \frac{\varepsilon_0}{2}\,\frac{4\sigma^2}{\varepsilon_0^2}\,x.$$

$$F = -\frac{\partial W_E}{\partial x} = -\frac{2\sigma^2}{\varepsilon_0} \quad (\text{ελκτική})$$

Πρόβλημα V. Για τη ράβδο του προβλήματος III, να βρεθεί το δυναμικό σε τυχαίο σημείο P όπως στο σχήμα. Στη συνέχεια να υπολογιστούν



οι ισοδυναμικές επιφάνειες (εδώ θα χρησιμοποιήσετε ελλειπτικές συντεταγμένες

$$u = \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2), \quad v = \tfrac{1}{2}(l_1 - l_2)$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(2x + 2\sqrt{a^2+x^2}\right)}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \ln\left[2\sqrt{r^2+(z-z')^2} + 2(z'-z) \right]\Big|_{-L}^{L}$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left[2\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{\sqrt{r^2+(z-L)^2} - (z-L)}{\sqrt{r^2+(z+L)^2} - (z+L)} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{l_2-(z-L)}{l_1-(z+L)} \right]}$$

$$l_1 = \sqrt{r^2+(z+L)^2}$$

$$l_2 = \sqrt{r^2+(z-L)^2}$$

$$l_1 = u+v$$
$$l_2 = u-v$$

$$u \cdot v = \frac{1}{4}(l_1^2 - l_2^2) = \frac{1}{4}(4zL) = zL$$

$$\frac{l_2-(z-L)}{l_1-(z+L)} = \frac{L l_2 - zL + L^2}{L l_1 - zL - L^2} = \frac{L(u-v+L)-uv}{L(u+v-L)-uv} =$$

$$= \frac{(u+L)(u-L)}{(u+L)(u-L)} \frac{L(u-v+L)-uv}{L(u+v-L)-uv} =$$

$$= \frac{u+L}{u-L} \underbrace{\left(\frac{(u-L)(L(u-v+L)-uv)}{(u+L)(L(u+v-L)-uv)} \right)}_{=1} = \frac{u+L}{u-L}$$

$$\boxed{\Phi_B = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{u+L}{u-L}}$$

Για $u \gg L$

$$\frac{u+L}{u-L} = \frac{1+\frac{L}{u}}{1-\frac{L}{u}} = \left(1+\frac{L}{u}\right)\left(1+\frac{L}{u}+\dots\right)$$
$$= 1+\frac{2L}{u}$$

$$\ln\left(1+\frac{2L}{u}\right) = \frac{2L}{u} - \frac{1}{2}\left(\frac{2L}{u}\right)^2 + \dots \simeq \frac{2L}{u}$$

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{u+L}{u-L} \simeq \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2L}{u} = \frac{q_{o\lambda}}{4\pi\epsilon_0 u}$$

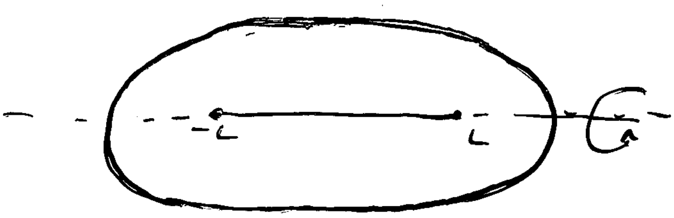
απόσταση από το κέντρο για $u \gg L$

Ισοδυναμικές επιφάνειες:

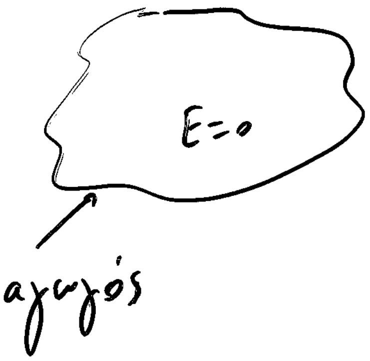
$\phi_1 = σταθ \Rightarrow \quad u = σταθ = u_0 \Rightarrow$

$$\boxed{l_1 + l_2 = 2u_0 = σταθ}$$

ελλειψοειδές εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα z με κέντρα $+L$, $-L$



Χωρητικότητα



μέσα στον αγωγό

$E=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\Phi=0 \Rightarrow \Phi=$ σταθ.

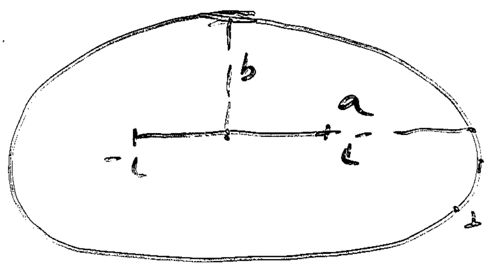
από συνέχεια της συνάρτησης δυναμικού

$\Phi=$ σταθ. στην επιφάνεια του αγωγού

Επιφάνειες αγωγών είναι ισοδυναμικές επιφάνειες

$$C=\frac{\Delta\Phi}{q}$$

π.χ.



Χωρητικότητα ελλειψοειδούς αγωγού

$$\Phi_1=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+L}{a-L}$$

$$\Phi_\infty=0$$

$$\frac{1}{C}=\frac{\Phi_1-\Phi_\infty}{q}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a+L}{a-L}\,\frac{1}{2\lambda L}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{a+L}{a-L}\right)$$

$$a^2-b^2=L^2$$

$$C=\frac{8\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2-b^2}}{\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}}=4\pi\varepsilon_0\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}$$

για $b\ll a$

$$C\simeq\frac{4\pi\varepsilon_0 a}{\ln\frac{2a}{b}}$$