ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ POISSON ΚΑΙ LAPLACE

Είδαμε ότι

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\nabla}\cdot E = \rho/\varepsilon_0 \\ \bar{E} = -\bar{\nabla}\phi\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0}$$

εξίσωση Poisson

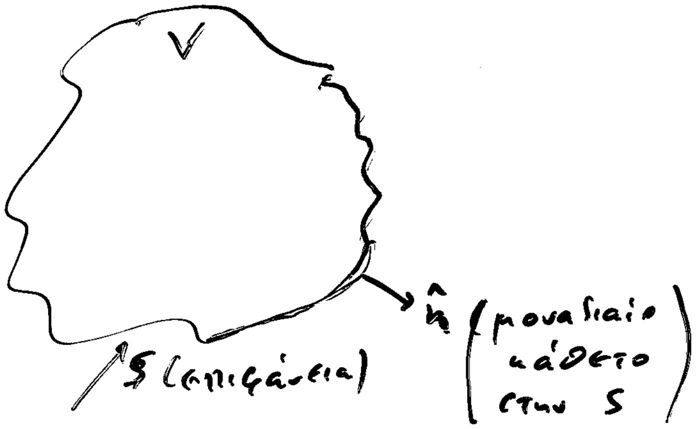
Για $\rho = 0$ $\boxed{\nabla^2\phi = 0}$ Laplace.

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ:

Για να λυθεί η Poisson ή η Laplace πρέπει να προσδιοριστούν συνοριακές συνθήκες.

Ερώτηση: Ποιές είναι οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες που εξασφαλίζουν καλά συμπεριφορά και μοναδικότητα των λύσεων των εξισώσεων Poisson και Laplace μέσα σε μία κλειστή περιοχή;

Απάντηση:



$\phi|_S = \phi_0$ Dirichlet

$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_S = \phi_n$ Neumann

↑ γνωστό

$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\vec{E}\cdot\hat{n}$ (κάθετη συνιστώσα του $\bar{E}$ στην επιφάνεια)

Μοναδικότητα: Έστω $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$.

και ϕ_1, ϕ_2 δύο λύσεις σε ίδιες συνοριακές συνθήκ.

$$U = \phi_2 - \phi_1$$

Τότε:

$$\int_V \left(\underbrace{U\nabla^2 U}_{\nabla^2 U = 0} + \bar{\nabla}U\cdot\bar{\nabla}U\right) d^3x = \oint_S \underbrace{U\frac{\partial U}{\partial n}}_{=0}\, dS \Rightarrow$$

$=0$ γιά ίδιες Dirichlet ή Neumann συνθήκες.

$\int_V |\bar{\nabla}U|^2 d^3x = 0 \Rightarrow U =$ σταθερά $= 0$ on S για Dirichet $\Rightarrow$

$\underline{\phi_1 = \phi_2}$

Για Dirichet $\underline{\phi_1 = \phi_2 + \text{σταθ.}}$

ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

1- διάσταση:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \phi = Ax + B$$

(A, B από συνοριακές συνθήκες).

2- διάσταση:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Μερικά στοιχεία από μιγαδική ανάλυση:

Για αναλυτική συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

δηλ. οι $u(x,y)$ και $v(x,y)$ ικανοποιούν την εξίσωση Laplace.

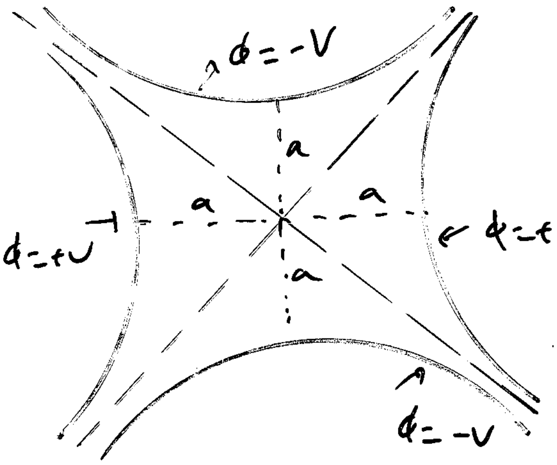
Αν μας δίνεται μία αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ τότε μπορούμε να λύσουμε τα εξής 2 ηλεκτροστατικά προβλήματα:

1) $\phi(x,y)$ με καθορισμένη τιμή V πάνω στην επιφάνεια αγωγού που δίνεται από $u(x,y) = \text{σταθ.}$ $\quad \phi = K\,u(x,y)$

2) $\phi(x,y)$ με ισοδυναμικές επιφάνειες $v(x,y) = \text{σταθ}$

$$\phi = K\,v(x,y)$$

<u>Παράδειγμα:</u> Τετραπολικός ηλεκτροστατικός φακός.



Επιφάνεια αγωγού υπερβολή $x^2 - y^2 = \text{σταθ.}$

Δοκιμάζω $u(x,y) = x^2 - y^2$

Από Cauchy-Riemann βρίσκω $v(x,y) = 2xy$

άρα $f(z) = x^2 - y^2 + i\,(2xy) = (x+iy)^2 = z^2$

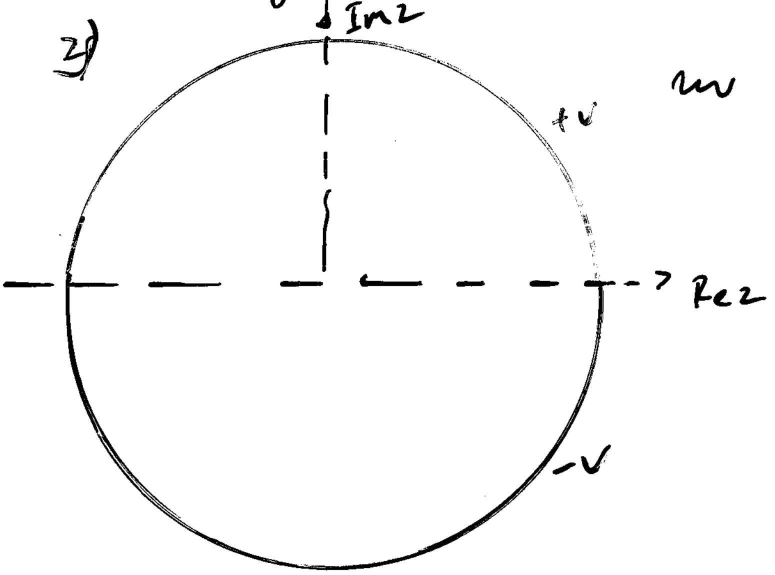
$$\phi = K(x^2 - y^2) \quad \left[\text{Στο } (x,y) = (0,a) \quad \phi = -V\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi = \frac{V}{a^2}(x^2 - y^2)}$$

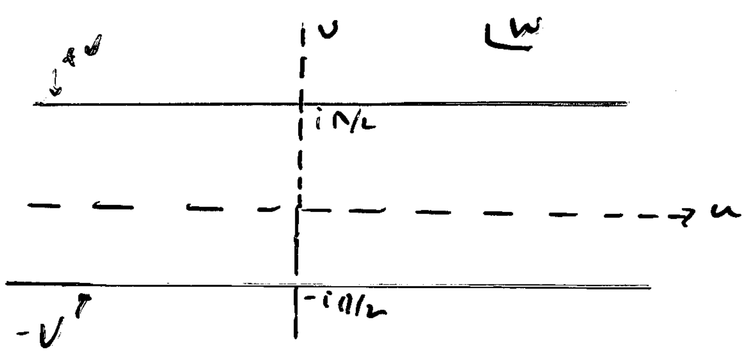
Σύμμορφοι μετασχηματισμοί:

Όταν η γεωμετρία των αγωγών είναι πολύπλοκη, μπορεί να απλοποιηθεί με σύμμορφο μετασχηματισμό.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το δυναμικό μεταξύ των δύο ημισφαιρίων



w-επίπεδο



$$w = \ln\left(\frac{a+z}{a-z}\right)$$

Πάνω στη σφαίρα $z = a e^{i\theta}$

$$w = \ln\left(i \cot\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$w = \begin{cases} \ln\left|\cot\frac{\theta}{2}\right| + i\frac{\pi}{2} & 0<\theta<\pi \\ \ln\left|\cot\frac{\theta}{2}\right| - i\frac{\pi}{2} & -\pi<\theta<0 \end{cases}$$

Στο w-επίπεδο:

$$\phi = Au + B$$

$\phi(\frac{\pi}{2}) = V$ και $\phi(-\frac{\pi}{2}) = -V \Rightarrow$

$$\phi(u,v) = \begin{cases} \frac{2V}{\pi} u & -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τώρα: $u = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}\left[\ln\left(\frac{a+z}{a-z}\right)\right] =$

$$= \operatorname{Im} \ln\left[\frac{a+re^{i\theta}}{a-re^{i\theta}}\right] = \operatorname{Im} \ln\left(\frac{a^2-r^2+2ar\sin\theta\, i}{a^2+r^2-2ar\cos\theta}\right)$$

$$= \operatorname{Im}(\ln R + i\theta_w) = \theta_w$$

όπου $R = \frac{\sqrt{(a^2-r^2)^2+4a^2r^2\sin^2\theta}}{a^2+r^2-2ar\cos\theta}$ και $\tan\theta_w = \frac{2ar\sin\theta}{a^2-r^2}$

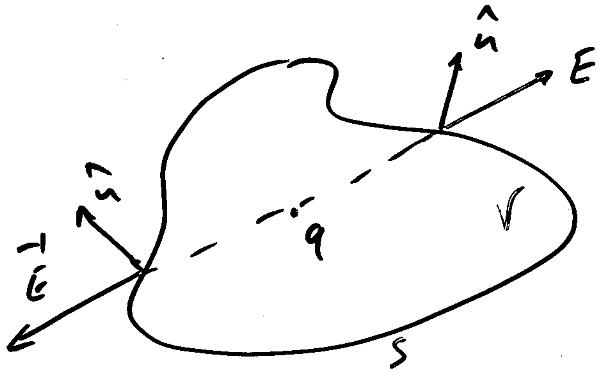
$$\boxed{\phi = \frac{2V}{\pi} \arctan\left[\frac{2ar\cos\theta}{a^2-r^2}\right]} \qquad 0<\theta<\pi$$

<u>3-διάστατη Laplace:</u>

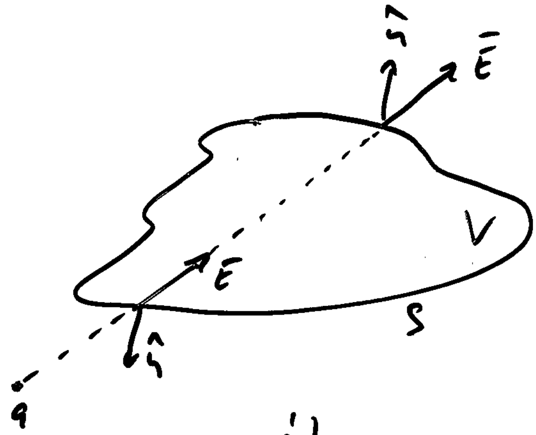
Θα τη δούμε εκτεταμένα αργότερα

Feynman, κεφ. 4,5

ΝΟΜΟΣ GAUSS



q μέσα



q έξω

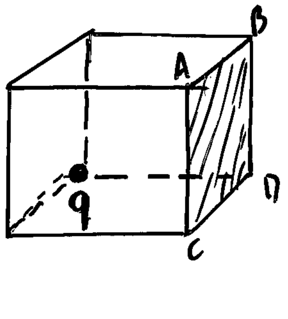
$$\oint \bar{E}\cdot\hat{n}\, ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(x)\, d^3x = \frac{q_{περ}}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{E}\, d^3x = \int_S \bar{E}\cdot\hat{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho(x)\, d^3x$$

$$\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \Phi_E$$

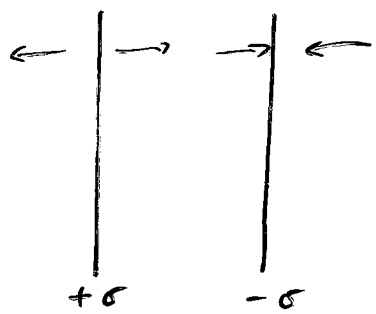
↳ ροή

<u>Πρόβλημα Ι:</u> Να βρεθεί η ροή διαμέσου της επιφάνειας ABCD κύβου ακμής L:

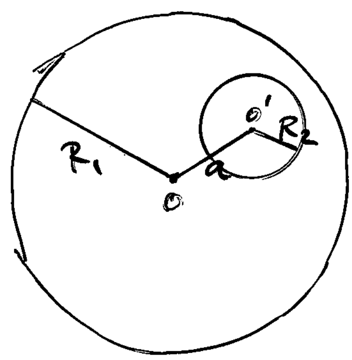


Πρόβλημα III: Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο για άπειρη επίπεδη επιφάνεια με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

Πρόβλημα IV: Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο δύο άπειρων επίπεδων επιφανειών με επιφανειακές πυκνότητες $+\sigma$, $-\sigma$.



Πρόβλημα V: Σφαίρα ακτίνας R_1 έχει σταθερή πυκνότητα φορτίου ρ εκτός μίας μικρής σφαιρικής κοιλότητας ακτίνας R_2 σε απόσταση a από το κέντρο της O. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της σφαιρικής κοιλότητας O'.



Πρόβλημα VI:

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss αποδείξτε ότι:

1) Τα φορτία σε αγωγό βρίσκονται πάντα στην επιφάνεια του

2) Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό κλειστού αγωγού μηδενίζεται

3) Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια αγωγού είναι κάθετο στην επιφάνεια και έχει μέτρο σ/ε_0 (σ επιφανειακή πυκνότητα)

<u>Πρόβλημα II.</u> Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από φορτισμένη σφαίρα ακτίνας R και πυκνότητας φορτίου:

1) $\rho = \rho_0$ $\qquad \rho_0 = const$

2) $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2$

<u>Πρόβλημα III:</u> Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από άπειρο κύλινδρο ακτίνας R με γραμμική πυκνότητα φορτίου

1) $\lambda = \lambda_0$ $\qquad \lambda_0 =$ σταθ.

2) $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{\rho}{R}\right)$