ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL.

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1) & \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ 2) & \bar{\nabla}\cdot B = 0 \\ 3) & \bar{\nabla}\times\bar{E} + \dfrac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ 4) & \bar{\nabla}\times\bar{B} - \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\bar{E}}{\partial t} = \mu_0\bar{J} \end{array}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

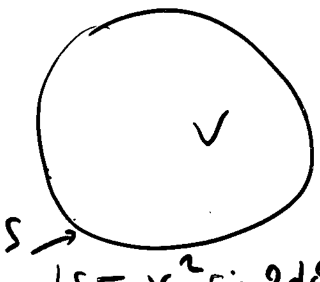
ρ πυκνότητα φορτίου $\left(\rho = \dfrac{dq}{d^3x}\right)$

$\vec{J}$ πυκνότητα ρεύματος

<u>διατήρηση φορτίου:</u>

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0}$$ (να αποδειχθεί)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho(x)\,d^3x\right) = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,d^3x = -\int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{J}\,d^3x = -\oint_S \bar{J}\cdot\hat{n}\,dS$$



$dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$\frac{d}{dt}q = 0 \qquad \left(J \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{r^{2+\epsilon}} \qquad \epsilon > 0\right)$$

$$\boxed{\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v}\times\bar{B})}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Βρείτε το ολικό φορτίο σε κύλινδρο ακτίνας R, ύψους L με πυκνότητα φορτίου:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} e^{-z/L}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Βρείτε το ολικό φορτίο για τις παρακάτω κατανομές

1) κυκλική γραμμή φορτίου ακτίνας R και γραμμική πυκνότητα λ_0

2) δίσκος ακτίνας R και επιφανειακή πυκνότητα σ_0.

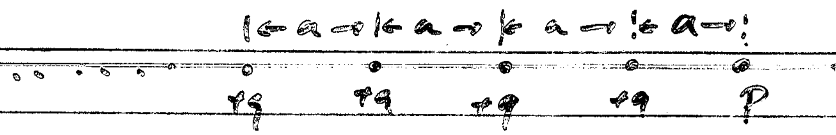
3) Σφαιρική κατανομή με πυκνότητα

$$\rho = \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

~~[illegible]~~ $\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\dots\right) = \frac{1}{a^2}\zeta(2) = \frac{1}{a^2}\left(\pi^2/6\right)$

Βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο

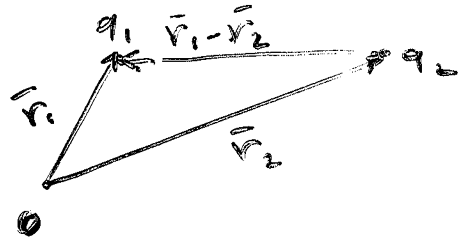
$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ ~~για~~ για άπειρη σειρά φορτίων



Ηλεκτροστατική

Στατικά φορτία.

• Σημειακά φορτία:



$$\bar F = q_1 \bar E = k\, q_1 q_2 \frac{\bar r_1 - \bar r_2}{|r_1 - r_2|^3}$$

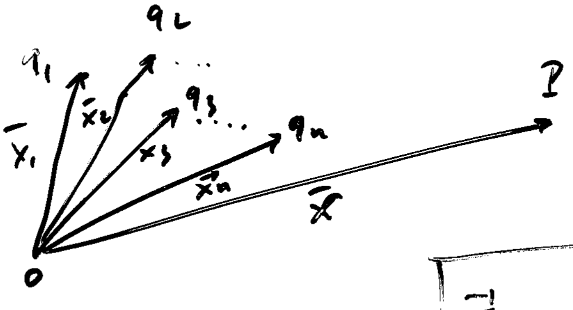
Σύστημα SI: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2$

$[q] = C$ (Coulomb)

$[E] =$ Volt/m

$$\boxed{\bar E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, q \,\frac{\bar r_1 - \bar r_2}{|r_1 - r_2|^3}}$$

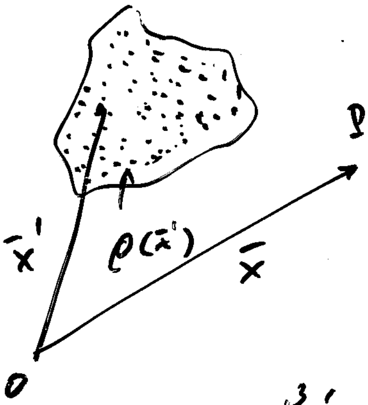
Πολλά σημειακά φορτία q_i σε θέσεις $\bar x_i$



Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P από τα φορτία q_i είναι:

$$\boxed{\bar E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_n \frac{\bar x - \bar x_n}{|x - x_n|^3}}$$

Αν τα φορτία είναι μικρά και πολύ πυκνά ώστε να μπορούν να προσεγγιστούν με μία συνεχή κατανομή $\rho(\bar{x})$ πυκνότητας φορτίου



$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\bar{x}') \frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3} d^3x'}$$

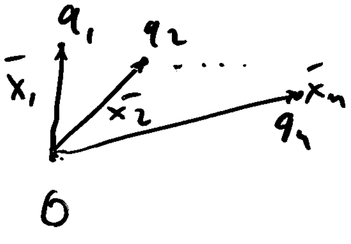
$$d^3x' = dV' = dx'dy'dz'$$

Για σημειακό φορτίο q στο $\bar{x}_0$, η πυκνότητα φορτίου $\rho(x)$ είναι:

Dirac δ-συνάρτηση

$$\boxed{\rho = q\, \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}_0)}$$

$$\boxed{\rho = \sum_{i=1}^{n} q_i\, \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}_i)}$$



DIRAC δ- συνάρτηση

δ-Kronecker: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

δ-συνάρτηση: γενίκευση του δ_{ij} για συνεχείς δείκτες.

$$\delta(x-a) = 0 \qquad x \neq a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

Επίσης:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

$$\int f(x)\,\delta'(x-a)\,dx = -f'(a)$$

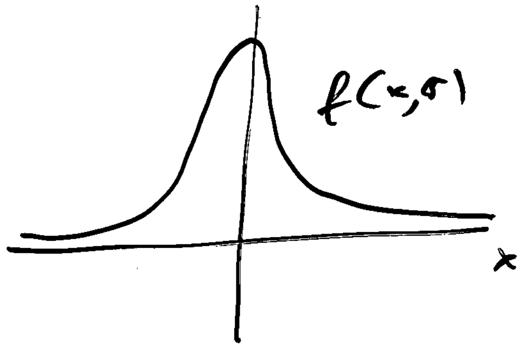
Ισχύει:

1) $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\,\delta(x)$

2) $\delta(f(x)) = \sum_i \dfrac{1}{|f'(x_i)|}\,\delta(x-x_i)$

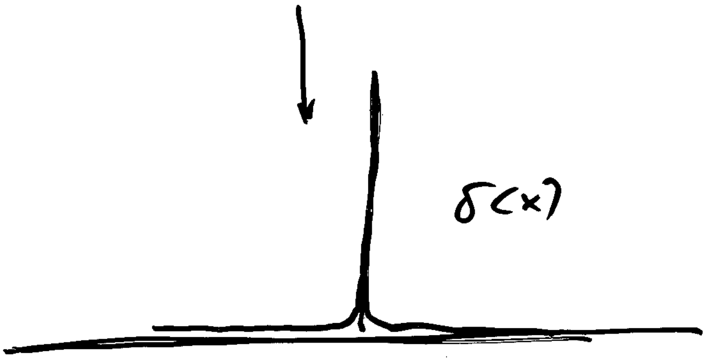
$f(x_i) = 0$

Η συνάρτηση δ είναι κανονική.



$$\Bigg\}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma} \qquad f(x,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma}\,e^{-x^2/\sigma^2}$$

$$\delta(x)=\lim_{\sigma\to 0}\frac{e^{-x^2/\sigma^2}}{\sqrt{\pi}\,\sigma}$$



Σε 2-dim

$$\delta^{(2)}(\vec{x})=\delta(x)\,\delta(y)$$

3-dim:

$$\delta^{(3)}(\vec{x})=\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$\int_V \delta^{(3)}(\bar{r})\, d^3 r = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z)\, dx\, dy\, dz = 1$$

$$\int_V f(\bar{r})\, \delta^{(3)}(\bar{r}-\bar{a})\, d^3 r = f(\bar{a})$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\, \delta^{(3)}(\bar{r}) \quad *$$

πιο γενικά:

$$\boxed{\nabla^2\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) = -4\pi\, \delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{x}')}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$f = \frac{1}{r} \rightarrow \nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\right) =$$

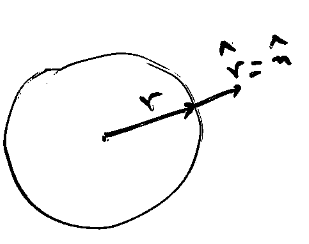
$$= 0$$

Έτσι $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ παντού! εκτός του $r=0$ όπου $\frac{1}{r} \to \infty$

$$\int_V \nabla^2 f\, d^3 r = \int_S \vec{\nabla} f \cdot \hat{n}\, dS = \int \frac{\partial f}{\partial r}\, r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= -\int \frac{1}{r^2}\, r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta = -4\pi$$

Έτσι $\nabla^2 f \neq 0$ παντού.



$$\boxed{\nabla^2 f = -4\pi\, \delta^{(3)}(\bar{r})}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι:

Χρησιμοποιείστε την δ-συνάρτηση του Dirac για να εκφράσετε την πυκνότητα φορτίου $\rho(\vec{r})$

A. Σε σφαιρικές συντεταγμένες, φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο σε σφαιρικό φλοιό ακτίνας R. $\rho = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$

B. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες φορτίο λ ανά μονάδα μήκους ομοιόμορφα κατανεμημένο σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας b. $\rho = \frac{\lambda}{2\pi b}\delta(r-b)$

C. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο σε δίσκο αμελητέου πάχους και ακτίνας R. $\rho = \frac{Q}{\pi R^2}\Theta(R-r)\delta(z)$

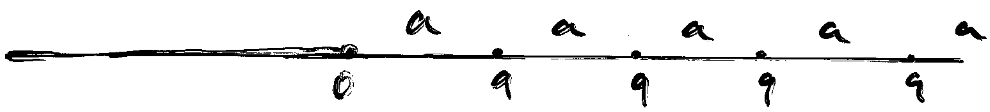
D. Το ίδιο όπως το C αλλά σε σφαιρικές. $\rho = \frac{Q}{2\pi R^2}\Theta(R-r)\delta(\theta-\frac{\pi}{2})$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ II

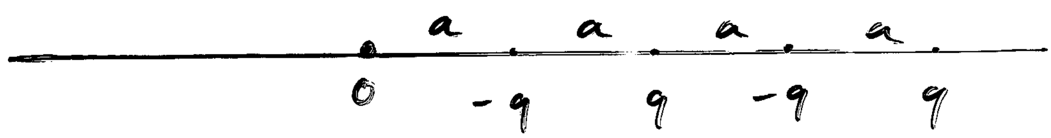
Για την περίπτωση C, υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του άξονα συμμετρίας

ΠΡΟΒΛΗΜΑ III

Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Ο.

1) 

$\frac{\pi^2}{6}$

2) 

$-\frac{\pi^2}{12}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV

Στατική κατανομή φορτίου δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο:

$$\vec{E} = A \frac{e^{-ar}}{r^2} \hat{r}.$$

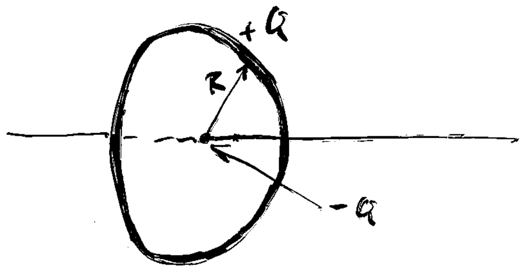
1) Ποιά είναι η $\rho(r)$;

2) Πόσο είναι το συνολικό φορτίο;

i) $\rho = -\epsilon_0 \frac{Ab}{r^2} e^{-br} + 4\pi\epsilon_0 A \delta^{(3)}(\vec{r})$

ii) $Q_{ολ} = 0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ V:



Θεωρήστε φορτίο $-Q$ που μπορεί να κινείται μόνο κατά τον άξονα ενός δακτυλίου ακτίνας R ο οποίος φέρει φορτίο $+Q$ ομοιόμορφα κατανεμημένο. Να δείξετε ότι το φορτίο $-Q$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση για πολύ μικρές απομακρύνσεις από το κέντρο του δακτυλίου.