

ΣΕΜΦΕ
Ακαδ. Έτος: 2009-2010
Επαναληπτική Εξέταση στο μάθημα
Φυσική IV: “Κβαντομηχανική Ι” 4^{ου} Εξαμήνου

Διδάσκων: Γ. Ζουπάνος
Διάρκεια 3 ώρες

01/08/2010
Επιλέξτε 4 θέματα

Θέμα 1^ο

(Άτομο Υδρογόνου)

Η Χαμιλτονιανή ηλεκτρονίου σε ένα αφόρτιστο άτομο υδρογόνου είναι

$$H = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- i. Να υπολογίσετε με το πρότυπο Bohr τις επιτρεπόμενες ενέργειες του ηλεκτρονίου για τις δέσμιες καταστάσεις του σε ένα άτομο υδρογόνου, που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή H .
- ii. Χρησιμοποιώντας τη σχέση αβεβαιότητας $\Delta r \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$ να υπολογίσετε προσεγγιστικά την ενέργεια του ηλεκτρονίου στην θεμελιώδη κατάσταση στο άτομο του υδρογόνου.
- iii. Η θεμελιώδης κατάσταση του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου μετά την επίλυση της εξίσωσης Schrödinger είναι $E = -13.6\text{eV}$. Να συγκρίνετε την τιμή αυτή με τα πιο πάνω αποτελέσματα. (Δίνονται: $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$, $e = 1.60 \times 10^{-19}\text{C}$ και $\hbar = 1.055 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$.)

Θέμα 2^ο

(Αβεβαιότητα Ενέργειας - Χρόνου)

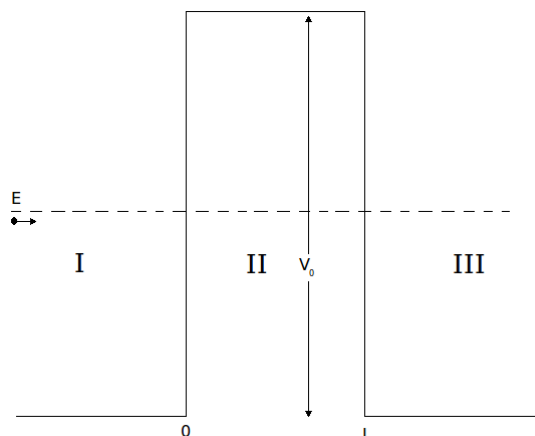
Τα άτομα αερίου που βρίσκεται σε ένα σωλήνα διεγείρονται με κάποιο τρόπο στο χρόνο $t = t_0$. Τα άτομα στη συνέχεια πέφτουν στη θεμελιώδη κατάσταση εκπέμποντας ορατό φως που ανήκει σε μια μοναδική φασματική γραμμή στα $5500\text{\AA}$. Η ένταση του φωτός ελαττώνεται με το χρόνο σύμφωνα με τον νόμο

$$I = I_0 e^{-\beta t}$$

όπου $\beta = 5 \times 10^7 \text{sec}^{-1}$. Βρείτε το πλάτος του μήκους κύματος της φασματικής γραμμής, αν το “φυσικό” πλάτος είναι η μόνη πηγή διαπλάτυνσης.

Θέμα 3^ο

(Μονοδιάστατη σκέδαση σωματιδίων)



Μια σταθερή μονοενεργειακή δέσμη σωματιδίων με ενέργεια E και μάζα m πέφτει από αριστερά πάνω σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού, που έχει μήκος L και ύψος V_0 . Αν $E = \frac{V_0}{2}$ να βρεθούν:

- Οι κυματοσυναρτήσεις στις διάφορες περιοχές.
- Τα ρεύματα πιθανότητας στις διάφορες περιοχές.
- Ο συντελεστής διέλευσης.

Θέμα 4^ο

(Αρμονικός ταλαντωτής σε μια διάσταση - Τελεστές δημιουργίας και καταστροφής)

Θεωρήστε αρμονικό ταλαντωτή σε μια διάσταση, με μάζα m και σταθερά ελατήριου k . Η Χαμιλτονιανή δίνεται

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

όπου x , p , ω είναι η θέση, ορμή και γωνιακή συχνότητα αντίστοιχα. Για τη μελέτη του προβλήματος χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των τελεστών δημιουργίας $a^\dagger$ και καταστροφής a . Υπενθυμίζουμε ότι η θέση (x) και η ορμή (p) ως συνάρτηση των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \text{ και } p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a)$$

- Να δείξετε ότι τα $a^\dagger$ και a είναι αδιάστατα μεγέθη.
- Με δεδομένο ότι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής είναι ερμιτιανοί συζυγείς, να δείξετε ότι η ορμή και η θέση είναι ερμιτιανοί τελεστές. (Υπενθύμιση: Δύο τελεστές A και B είναι ερμιτιανοί συζυγείς αν $A = B^\dagger$ και $B = A^\dagger$. Ένας τελεστής A είναι ερμιτιανός αν $A = A^\dagger$)

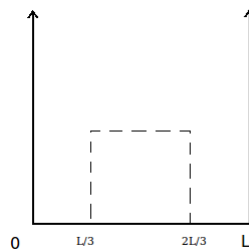
- iii. Δεδομένου για τους κβαντομηχανικούς τελεστές θέσης και ορμής ισχύει ότι $[x, p] = i\hbar$, να δείξετε ότι $[a, a^\dagger] = 1$.
- iv. Να δείξετε ότι η Χαμιλτονιανή του ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

- v. Να δείξετε ότι αν $|n\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή της Χαμιλτονιανής με ιδιοτιμή $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, τότε $a^\dagger|n\rangle$ είναι επίσης ιδιοκατάσταση του τελεστή της Χαμιλτονιανής και να υπολογίσετε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Θέμα 5^ο

(Αξιώματα Κβαντομηχανικής - Πληρότητα χώρου ιδιοκαταστάσεων)



- i. Σωματίδιο βρίσκεται σε μονοδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μήκους L . Υπολογίστε τις ιδιοενέργειες και τις ιδιοκαταστάσεις του σωματιδίου στο χώρο των θέσεων.
- ii. Αν το σωματίδιο για κάποια χρονική στιγμή $t = t_0$ έχει κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{L}} & \text{για } \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στη θεμελιώδη κατάσταση;

Καλή Επιτυχία!