- **Άσκηση 8** Από την υπόθεση της άσκησης έχουμε ότι

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = e^{f(x)-g(x)}$$

όμως αυτο συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} &= e^{f(x)-g(x)} && \Leftrightarrow \\
\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{e^{-g(x)}}{e^{-f(x)}} && \Leftrightarrow \\
\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad f'(x)e^{-f(x)} &= g'(x)e^{-g(x)} && \Leftrightarrow \\
\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad -f'(x)e^{-f(x)} &= -g'(x)e^{-g(x)} && \Leftrightarrow \\
\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \left(e^{-f(x)}\right)' &= \left(e^{-g(x)}\right)' && \Leftrightarrow \\
\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad e^{-f(x)} &= e^{-g(x)} + c'
\end{aligned}$$

Από την υπόθεση της άσκησης έχουμε ότι $f(0) = g(2011) = 1$ άρα από την τελευταία σχέση έχουμε ότι:

$$e^{-1} = e^{-g(0)} + c' \tag{7}$$

και

$$e^{-f(2011)} = e^{-1} + c' \tag{8}$$

αφιαρώντας τις 7 και 8 κατα μέλη παίρνουμε ότι

$$e^{-f(2011)} - 2e^{-1} = -e^{-g(0)} \tag{9}$$

άρα από την 9 συμπαιρένουμε ότι

$$e^{-f(2011)} - 2e^{-1} < 0$$

κάνοντας στοιχειωδεις υπολογισμούς

$$\begin{aligned}
e^{-f(2011)} - 2e^{-1} &< 0 && \Leftrightarrow \\
e^{-f(2011)} &< 2e^{-1} && \Leftrightarrow \\
\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-f(2011)} &< e^{-1} && \Leftrightarrow \\
e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-f(2011)} &< e^{-1} && \Leftrightarrow \\
e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) - f(2011)} &< e^{-1} && \Leftrightarrow \\
\ln\left(\frac{1}{2}\right) - f(2011) &< -1 && \Leftrightarrow \\
f(2011) &> \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ύπολ. $\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos x^{n+1}}{\arccos x^n}$

είναι γνωστό ότι $\lim_{x\to 1^-} \arccos x = 0$ άρα το όριο είναι απροσδιόριστο στη μορφή $\frac{0}{0}$. Η $\arccos x^n$ πληροί τις προϋποθέσεις του κανόνα De L'Hopital

Έχουμε $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$

και για $n \geq 1$ $(\arccos x^n)' = -n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} =$

$= \frac{-n \cdot x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}$, άρα

$$\frac{(\arccos x^{n+1})'}{(\arccos x^n)'} = \frac{\frac{-(n+1)x^n}{\sqrt{1-x^{2n+2}}}}{\frac{-n x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}} = \frac{(n+1)\cdot x^n \cdot (1-x^{2n})^{1/2}}{n \cdot x^{n-1} (1-x^{2n+2})^{1/2}} =$$

$$= \frac{(n+1)}{n} \cdot x \cdot \left(\frac{1-(x^2)^n}{1-(x^2)^{n+1}}\right)^{1/2} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot x \cdot \left(\frac{\cancel{(1-x^2)}(x^{2n-2}+\dots+1)}{\cancel{(1-x^2)}(x^{2n}+\dots+1)}\right)^{1/2}$$

άρα $\lim_{x\to 1^-} \frac{(\arccos x^{n+1})'}{(\arccos x^n)'} = \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot 1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$