Πιθανότητες

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots$

$A \setminus B = A \cap B^c$ = A και όχι B $= A \cap B^c$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ A ή B αλλά όχι και τα 2

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Longrightarrow P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \cdot P(B_j)$ ανεξ. $P(A|B) = P(A)$

Bayes : $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$

Τ.Μ

διακριτές	$F(X)$	$\to \sum p(x)$
συνεχείς	$F(x)$	$\to \int f(x)$

$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ (και)

Ιδιότητες $E[x] = \mu$

1) α) $E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x_i} g(x_i) p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx \end{cases}$ β) $E[g(x,y)] = \begin{cases} \sum_{y}\sum_{x_i} g(x_i, y_i) p(x_i, y_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) \end{cases}$

2) $E[C] = C$ 3) $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$

4) Αν X, Y ανεξάρτητες $\to E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$

Απόδειξη: Εστω X, Y συνεχείς : $E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y\, f(x,y)\, dx\, dy =$
$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x y\, f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\, dy = E[X] \cdot E[Y]$
ομοίως για διακριτές ∎

Ιδιότητες διασποράς $\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2]$, $\sigma = \sqrt{V[X]}$ τυπική απόκλιση της X

1) $\sigma^2 = V[X] = E[(X-\mu)^2] \ge 0$ Αν $V[X] = 0$ τότε $X = C$

2) $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

Απόδειξη : $V[X] = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2$
$= E[X^2] - \mu^2$ ∎

3) $V[\alpha X + \beta] = \alpha^2 V[X]$

Απόδειξη: $V[\alpha X + \beta] = E[(\alpha x + \beta - (\alpha\mu + \beta))^2] = E[\alpha^2 (x-\mu)^2] = \alpha^2 E[(x-\mu)^2]$

4) Αν X, Y ανεξ. $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$ το αντίστροφο δεν ισχύει

Απόδειξη: $V[X+Y] = E[(X+Y)^2] - E[X+Y]^2 =$
$E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X] + E[Y])^2 = E[X^2] + 2E[X \cdot Y] + E[Y^2] -$
$E[X]^2 - 2E[X]E[Y] - E[Y]^2 = V[X] + V[Y]$ ∎

Συνδιακύμανση των X, Y: $\boxed{Cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)\cdot(Y-\mu_Y)] = E(X\cdot Y) - E(X)E(Y)}$ $Cov(X,X) = V(X)$

ιδιότητες:

αν $X=c \rightarrow Cov$

1) $Cov(X,Y) = E[XY] - E(X)\cdot E[Y]$

αν X,Y ανεξ $\rightarrow Cov(X,Y)=0$ | $Cov(X,Y)=0$ και $X,Y \rightarrow$ ασυσχέτιστα (πρώτη ένδειξη ανεξαρτησίας)

2) $Cov(Y,X) = Cov(X,Y)$ | $Cov(aX, Y) = a\,Cov(X,Y)$

$Cov(X_1+X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

3) $V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2\,Cov(X,Y)$

Απόδειξη: $E[(X+Y)^2] - (E[X]+E[Y])^2 =$

$E(X^2+2XY+Y^2) - E(X)^2 - 2E[X]\cdot E[Y] - E[Y]^2 =$

4) $Cov(X,Y)^2 \leq V[X]\cdot V[Y]$ "=" αν ν είτε $X=c$ είτε $Y=c$ είτε $Y=aX+$

Απόδειξη: $0 \leq V[\lambda X+Y] = V[\lambda^2 X] + V[\lambda Y] + 2\,Cov(\lambda X, Y)$

$= V[X]\cdot\lambda^2 + 2\,Cov(X,Y)\lambda + V[Y]$

$\Rightarrow$ διακρίνουσα ≤ 0 $\Delta = 4\,Cov(X,Y) - 4V[X]\cdot V[Y] \leq 0 \Rightarrow$

$Cov(X\,Y)^2 \leq V[X]\cdot V[Y]$

ισότητα αν $\Delta=0$ $V[\lambda X+Y]=0$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda X + Y = c$

$\rho(X,Y)$ συντελεστής συσχέτισης των X,Y: $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]\cdot V[Y]}}$

$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

ΚΟΘ

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow Z \sim N(0,1)$$

συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά k ~~με επανάληψη~~: $\binom{\nu}{k} = \dfrac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ με επανάληψη: $\binom{\nu+k-1}{k} = \ldots$

Bernoulli: $0\leq p\leq 1$, B_p, $p_X = p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$, $E[X]=p$, $V[X]=p(1-p)$

Διωνυμική: $b(n,p)$: $p_X = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $E[X]=p\cdot n$, $V[X]=n\cdot p\cdot(1-p)$ x επιτυχίες σε n δοκιμές

Αρν. Διωνυμική $p_X = \binom{x-1}{n-1}p^n\cdot(1-p)^{x-n}$, $E[X]=n/p$, $V[X]=n(1-p)/p^2$ x δοκιμές μέχρι n-οστή επιτυχία

Γεωμ: $p_X = p(1-p)^{x-1}$, $E(X)=1/p$ $V[X]=(1-p)/p^2$ αριθμός δοκιμών μέχρι την πρώτη 1 επιτυχίας

Ομοιόμορφη: $f(x) = 1/(\beta-a)$, $a<x<\beta$ $E[X]=\frac{a+\beta}{2}$ $V(X)=(\beta-a)^2/12$ | $U(a,\beta)$

Κανονική: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$ $E[X]=\mu$, $V[X]=\sigma^2$ | $N(\mu,\sigma^2)$

Γάμμα: $f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-ax}$, $x>0$ $E(X)=p/a$ $V[X]=p/a^2$ $G(a,p)$

Εκθετική: $E(a)$ $f(x) = ae^{-ax}$, $x>0$ $E(X)=1/a$ $V[X]=1/a^2$