



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1^Η

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2011-2012

1^ο Πρόβλημα (Λογιστική εξίσωση)

Ο πληθυσμός $q = q(t)$ της πόλης της Νέας Υόρκης, αν δεν συμπεριλάβουμε την υψηλή μετανάστευση καθώς και τις ανθρωποκτονίες, ικανοποιεί τη λογιστική εξίσωση $\frac{dq}{dt} = \frac{1}{25}q - \frac{1}{25 \cdot 10^6}q^2$, $q(t_0) = q_0$ (1), όπου t χρόνια.

α) Τροποποιείτε την εξίσωση έτσι ώστε να συμπεριλάβετε το γεγονός ότι 9000 άνθρωποι ανά χρόνο εγκαταλείπουν την πόλη και 1000 άνθρωποι ανά χρόνο δολοφονούνται (τα δεδομένα αφορούν την περίοδο πριν το 2000).

β) Θεωρώντας ότι ο πληθυσμός της Νέας Υόρκης ήταν περίπου 8.000.000 το 1970 να βρείτε τον πληθυσμό $q(t)$ για κάθε $t > 1970$. Τι συμβαίνει όταν $t \gg 1$;

γ) Συγκρίνετε τα αποτελέσματα της εξίσωσης που προκύπτει στην ερώτηση α) με αυτά της λογιστικής εξίσωσης (1) για $t \gg 1$.

δ) Να εξετάσετε επίσης την εξίσωση διαστατικά (να δώσετε τις μονάδες των σταθερών, $r = 1/25$, $l = 1/25 \cdot 10^6$).

2^ο Πρόβλημα (Πληθυσμιακό Πρότυπο)

Μελετάμε τον πληθυσμό των φαλαινών σε κάποια θαλάσσια περιοχή. Γνωρίζουμε ότι αυτή η θαλάσσια περιοχή δεν μπορεί να θρέψει περισσότερες από K το πλήθος φάλαινες, ενώ αν ο αριθμός των φαλαινών είναι κατώτερος του R , τότε οι φάλαινες οδηγούνται σε εξαφάνιση.

α) Σχολιάστε το μαθηματικό πρότυπο: $\frac{dq}{dt} = m(K - q)(q - R)$, $q(0) = q_0$ (1),

όπου $q = q(t)$ ο πληθυσμός των φαλαινών και $t, m > 0$.

β) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα με άξονες q', q και άξονες q, t αν (i) $q_0 < R$,

(ii) $R < q_0 < K$, (iii) $q_0 > K$, (iv) $q_0 = K$ και (v) $q_0 = R$.

γ) Να λυθεί το πρόβλημα (1).

δ) Προτείνετε τρόπο προσδιορισμού των m, R, K όταν αυτά (ένα ή και όλα) είναι άγνωστα.

ε) Αν το μαθηματικό πρότυπο (1) προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό των φαλαινών, περιγράψτε μία πολιτική αλιείας των φαλαινών.

3^ο Πρόβλημα (Πληθυσμιακό Πρότυπο, Ανταγωνιστικά είδη)

Θεωρούμε δύο είδη ενός οικοσυστήματος τα οποία ανταγωνίζονται για την ίδια, περιορισμένη σε ποσότητα, τροφή. Έστω $q = q(t)$ και $p = p(t)$ ο αριθμός των δύο ειδών, όπου q, p ικανοποιούν την ίδια λογιστική εξίσωση (χωρίς να συμπεριλάβουμε τον ανταγωνισμό των ειδών). Να κατασκευασθεί ένα μαθηματικό πρότυπο που να συμπεριλαμβάνει τον ανταγωνισμό των ειδών (ο ανταγωνισμός μειώνει τον αριθμό των ειδών και είναι ανάλογος του γινομένου των q, p με σταθερές αναλογίας $m > 0$ και $n > 0$, αντίστοιχα). Να μελετηθεί (ποιοτικά) το πρόβλημα όταν $m > n$ (τι σημαίνει $m > n$ σε σχέση με τα είδη), να σκιαγραφηθεί (σχεδιαστεί) το επίπεδο φάσεως.

4^ο Πρόβλημα (Πληθυσμιακό Πρότυπο, Θηρευτής-Θήραμα)

Ένα σύστημα θηρευτή-θηράματος ενός είδους φάλαινας (Φ) και ενός ανταρκτικού μικρού ψαριού (Ψ) έχει τα εξής χαρακτηριστικά. (α) Δεν υπάρχει περιορισμός στην αύξηση τους ούτε άλλοι ανταγωνιστές. (β) Υπάρχει περιορισμός αλλά δεν υπάρχουν άλλοι ανταγωνιστές. (γ) Οι Φ μειώνονται (εξαφανίζονται) με ρυθμό ανάλογο του πληθυσμού τους και αυξάνουν ανάλογα με τον αριθμό των συναντήσεων ($\Phi \times \Psi$). (δ) Επιπλέον τα Ψ αυξάνονται ανάλογα του πληθυσμού τους και μειώνονται ανάλογα με τον αριθμό των συναντήσεων ($\Phi \times \Psi$). Βρείτε το σύστημα που περιγράφει τους ρυθμούς μεταβολής $\Phi = x = x(t)$ και $\Psi = y = y(t)$ και στη συνέχεια την $y = y(x)$. Κάνετε ποιοτική μελέτη (περιοδικό φαινόμενο, κλπ).

5^ο Πρόβλημα (Διεξαγωγή μάχης)

Έστω ότι το X παριστάνει μία ομάδα ανταρτών και Y μία ομάδα του συμβατικού στρατού. Η μάχη μεταξύ των δυνάμεων X και Y μπορεί να περιγραφεί από ένα μαθηματικό μοντέλο τύπου-Lanchestr, δηλαδή από ένα αυτόνομο σύστημα της μορφής:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -g x y \\ \frac{dy}{dt} &= -b x \end{aligned} \right\},$$

όπου $x = x(t)$, $y = y(t)$ παριστάνουν τις δυνάμεις των ανταρτών και του συμβατικού στρατού τη χρονική στιγμή t αντίστοιχα.

α) Ποιες υποθέσεις πρέπει να γίνουν και ποιες σχέσεις πρέπει να ληφθούν υπόψη έτσι ώστε να δικαιολογηθεί το παραπάνω μοντέλο; Είναι το παραπάνω μοντέλο «λογικό»;

β) Αποδείξτε ότι τα $x = x(t)$, $y = y(t)$ συνδέονται μεταξύ τους με τον παραβολικό νόμο $g y^2 = 2 b x + M$ όπου $M = g y_0^2 - 2 b x_0$, $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$.

γ) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι αρχικές συγκεντρώσεις δυνάμεων x_0 και y_0 έτσι ώστε στο τέλος να επικρατήσει ο συμβατικός στρατός Y; Αν τελικώς δεν επικρατήσει ο συμβατικός στρατός Y πόσοι επιζώντες θα υπάρχουν;

6° Πρόβλημα (Εκτόξευση Δορυφόρου)

Η πτήση των πυραύλων βασίζεται στην εξής αρχή. Ο πύραυλος, κατά τη διάρκεια της πτήσης του, χάνει συνεχώς μάζα υπό μορφή εκτοξευμένων αερίων, γεγονός που τον αναγκάζει να κινείται κατά την αντίθετη κατεύθυνση. Αν θεωρήσουμε πύραυλο μάζας m κινούμενο με ταχύτητα v ο οποίος σε μικρό χρονικό διάστημα Δt χάνει μία μικρή ποσότητα μάζας, έστω Δm_p , λόγω των εκτοξευμένων αερίων τα οποία κινούνται με ταχύτητα u , τότε στο τέλος του χρονικού διαστήματος Δt η ταχύτητα του πυραύλου θα είναι $v + \Delta v$. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, παίρνουμε ότι η ολική δύναμη που ασκείται στον πύραυλο είναι:

$$F = m \frac{dv}{dt} - (u + v) \frac{dm_p}{dt}.$$

Η εκτόξευση ενός δορυφόρου σε μία τροχιά γύρω από τη Γη γίνεται με τη βοήθεια ενός πυραύλου. Κατά την εκτόξευση των δορυφόρων μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τη μέγιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει ο πύραυλος έτσι ώστε ο δορυφόρος να παραμείνει σε τροχιά γύρω από τη Γη.

α) Ας υποθέσουμε ότι η μάζα του πυραύλου είναι m και η ταχύτητά του v . Έστω ότι σ' ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt ο πύραυλος χάνει μία μικρή ποσότητα μάζας Δm_p , η οποία αφήνει τον πύραυλο με μία ταχύτητα u με αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της κίνησης. Τότε η τελική ταχύτητα του συστήματος πυραύλου-δορυφόρου θα είναι $v + \Delta v$.

Υποθέτοντας τώρα ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα πύραυλος-δορυφόρος είναι μηδενικές, να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα του συστήματος ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{-c}{m} \right) \frac{dm}{dt}$$

όπου $c = u + v$ είναι η ταχύτητα των εκτοξευμένων αερίων σε σχέση με τον πύραυλο (σχετική ταχύτητα εξώθησης).

β) Θεωρούμε ότι αρχικά για χρόνο $t = 0$ η ταχύτητα του συστήματος πυραύλου-δορυφόρου είναι $v = 0$ και η μάζα του ίση με $m = M + P$, όπου P είναι η μάζα του δορυφόρου και $M = \varepsilon M + (1 - \varepsilon)M$ ($0 < \varepsilon < 1$) είναι η μάζα των αρχικών καυσίμων εM συν τη μάζα $(1 - \varepsilon)M$ του πυραύλου. Να λυθεί η εξίσωση του ερωτήματος α) και να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$v = -c \ln \frac{m}{M + P}.$$

γ) Να δειχθεί ότι όταν όλα τα καύσιμα θα έχουν καεί η ταχύτητα του συστήματος πυραύλου-δορυφόρου θα είναι ίση με:

$$v_f = -c \ln \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \beta} \right),$$

όπου $\beta = P/M$ είναι το πηλίκο της μάζας του δορυφόρου προς τη μάζα του πυραύλου.

δ) Να βρεθεί η ταχύτητα v_f όταν $c = 3 \text{ km/sec}$, $\varepsilon = 0.8$, και $\beta = 1/100$.

ε) Ας υποθέσουμε ότι σχεδιάζεται να εκτοξευθεί δορυφόρος σε κυκλική τροχιά και σε ύψος $h \text{ km}$ πάνω από την επιφάνεια της Γης. Έστω επιπλέον ότι η βαρυτική έλξη δίνεται από το νόμο των αντίστροφων τετραγώνων του Νεύτωνα

$$\frac{\gamma m M_e}{(h + R_e)^2},$$

όπου γ είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας, m η μάζα του δορυφόρου, M_e η μάζα της Γης και R_e η ακτίνα της Γης. Αν η δύναμη αυτή εξισορροπείται από την

κεντρομόλο δύναμη $\frac{mv^2}{(h + R_e)^2}$, όπου v είναι η ταχύτητα του δορυφόρου, ποια πρέπει

να είναι η ταχύτητα εκτόξευσης του συστήματος πυραύλου-δορυφόρου έτσι ώστε ο δορυφόρος να αποκτήσει τελικώς κυκλική τροχιά σε ύψος 100 km γύρω από την επιφάνεια της Γης; Λαμβάνοντας υπόψη σας τους υπολογισμούς του ερωτήματος δ) μπορεί ένας πύραυλος να εκτοξεύσει έναν δορυφόρο σε μία κυκλική τροχιά τέτοιου ύψους από την επιφάνεια της Γης;

7^ο Πρόβλημα (Ραδιενέργεια – Εκθετική Μείωση)

Ο φημισμένος πίνακας «Disciples at Emmaus», πιστοποιήθηκε από τον ιστορικό τέχνης A. Bredius ως αυθεντικός πίνακας του 17^{ου} αιώνα ζωγραφισμένος από τον Vermeer. Έτσι αγοράστηκε από το σύλλογο με το όνομα «Rembrandt». Το 1945, ο παραχαράκτης έργων τέχνης Van Meegeran, ανακοίνωσε μέσα από μία φυλακή του Βελγίου ότι αυτός ήταν ο ζωγράφος του πίνακα (αυτό μάλλον το έκανε για να αποφύγει τυχόν τιμωρία, γιατί είχε ήδη πουλήσει, ως αυθεντικό πίνακα του Vermeer έναν άλλο πίνακα, στους Ναζί κατά τη διάρκεια του 2^{ου} παγκοσμίου πολέμου). Να δώσετε κριτήρια για την αυθεντικότητα του πίνακα αν γνωρίζετε ότι:

α) Μία χρωστική ουσία στη ζωγραφική είναι ο λευκός μόλυβδος ο οποίος περιέχει ραδιενεργό ισότοπο του μολύβδου, Pb^{210} . Ο λευκός μόλυβδος κατασκευάζεται από μεταλλεύματα τα οποία μεταξύ των άλλων περιέχουν και ραδιενεργό Ράδιο, Ra^{226} , το οποίο διασπάται σε Pb^{210} . Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του Ra^{226} είναι 1620 χρόνια, ενώ του Pb^{210} είναι 22 χρόνια.

β) Η ποσότητα του Ra^{226} που διασπάται σε Pb^{210} είναι ίση με την ποσότητα Pb^{210} που διασπάται σε άλλα στοιχεία, δηλ. έχουμε «ραδιενεργό ισορροπία».

γ) Η ποσότητα του Ra^{226} παραμένει περίπου σταθερά σε διάστημα 300 χρόνων.

"Elementary Differential
Equations
with BVP's"

KOHLER & JOHNSON

PROJECTS

Project 1: Flushing Out a Radioactive Spill

A lake holding 5,000,000 gallons of water is fed by a stream. Assume that fresh water flows into the lake at a rate of 1000 gal/min and that water flows out at the same rate. At a certain instant, an accidental spill introduces 5 lb of soluble radioactive pollutant into the lake. Assume that the radioactive substance has a half-life of 2 days and dissolves in the lake water to form a well-stirred mixture.

1. Let $Q(t)$ denote the amount of radioactive material present within the lake at time t , measured in minutes from the instant of the spill. Use the conservation principle [rate of change of $Q(t)$ equals rate in minus rate out] to derive a differential equation describing how $Q(t)$ changes with time. Note that the solute is removed by both outflow and radioactive decay. Add the appropriate initial condition to obtain the initial value problem of interest.
2. Solve the initial value problem formulated in part 1.
3. How long will it take for the concentration of the radioactive pollutant to be reduced to 0.01% of its original value?

Project 2: Processing Seafood

Many foods, such as crabmeat, are sterilized by cooking. Harvested crabs are laden with bacteria, and the crabmeat must be steamed to reduce the bacteria population to an acceptable level. The longer the crabmeat is steamed, the lower the final bacteria count. But steaming forces moisture out of the meat, reducing the amount of crabmeat for sale. Excessive cooking also destroys taste and texture. The processor is therefore faced with a tradeoff when choosing an appropriate steaming time.

The basis for a choice of steaming time is the concept of "shelf life." After the steaming treatment is completed, the product is placed in a sterile package and refrigerated. Under refrigeration, the bacterial content in the meat slowly increases and eventually reaches a size where the crabmeat is no longer suitable for consumption. The time span during which packaged crabmeat is suitable for sale is called the *shelf life* of the product. We study the following problem: How long must the crabmeat be steamed to achieve a desired shelf life?

The first step in modeling shelf life is to choose a model that describes the population dynamics of the bacteria. For simplicity, assume

$$\frac{dP}{dt} = k(T)P, \quad (1)$$

where $P(t)$ denotes the bacteria population at time t . In equation (1), $k(T)$ represents the difference between birth and death rates per unit population per unit time. In this model, k is not constant; it is a function of T , where T denotes the temperature of the crabmeat. [Note that $k(T)$ is ultimately a function of time, since the temperature T of the crabmeat varies with time in the steamer and in the refrigeration case.]

We need to choose a reasonable model for the bacteria growth rate, $k(T)$. We do so by reasoning as follows. At low temperatures (near freezing), the rate of growth of the bacteria population is slow; that's why we refrigerate foods. Mathematically, $k(T)$ is a relatively small positive quantity at those temperatures. As temperature increases, the bacterial growth rate, $k(T)$, first increases, with the most rapid rate of growth occurring near 90°F. Beyond this temperature, the growth rate begins to decrease. Beyond about 145°F, the death rate exceeds the birth rate and the bacteria population begins to decline. A simple model that captures this qualitative behavior is the quadratic function

$$k(T) = k_0 + k_1(T - 34)(140 - T), \quad (2)$$

where k_0 and k_1 are positive constants that are typically determined experimentally.

We also need a model that describes the thermal behavior of the crabmeat—how the crabmeat temperature T varies in response to the temperature of the surroundings. Assuming Newton's law of cooling, we have

$$\frac{dT}{dt} = \eta[S(t) - T]. \quad (3)$$

In equation (3), η is a positive constant and $S(t)$ is the temperature of the surroundings. Note that the surrounding temperature is not constant, since the crabmeat is initially in the steamer and then in the refrigeration case.

We now apply this model to a specific set of circumstances. Assume the following:

- (i) Initially the crabmeat is at room temperature (75°F) and contains about 10^7 bacteria per cubic centimeter.
- (ii) The steam bath is maintained at a constant 250°F temperature.
- (iii) When the crabmeat is placed in the steam bath, it is observed that its temperature rises from 75°F to 200°F in 5 min.
- (iv) When the crabmeat is kept at a constant 34°F temperature, the bacterial count in the crabmeat doubles in 60 hr.